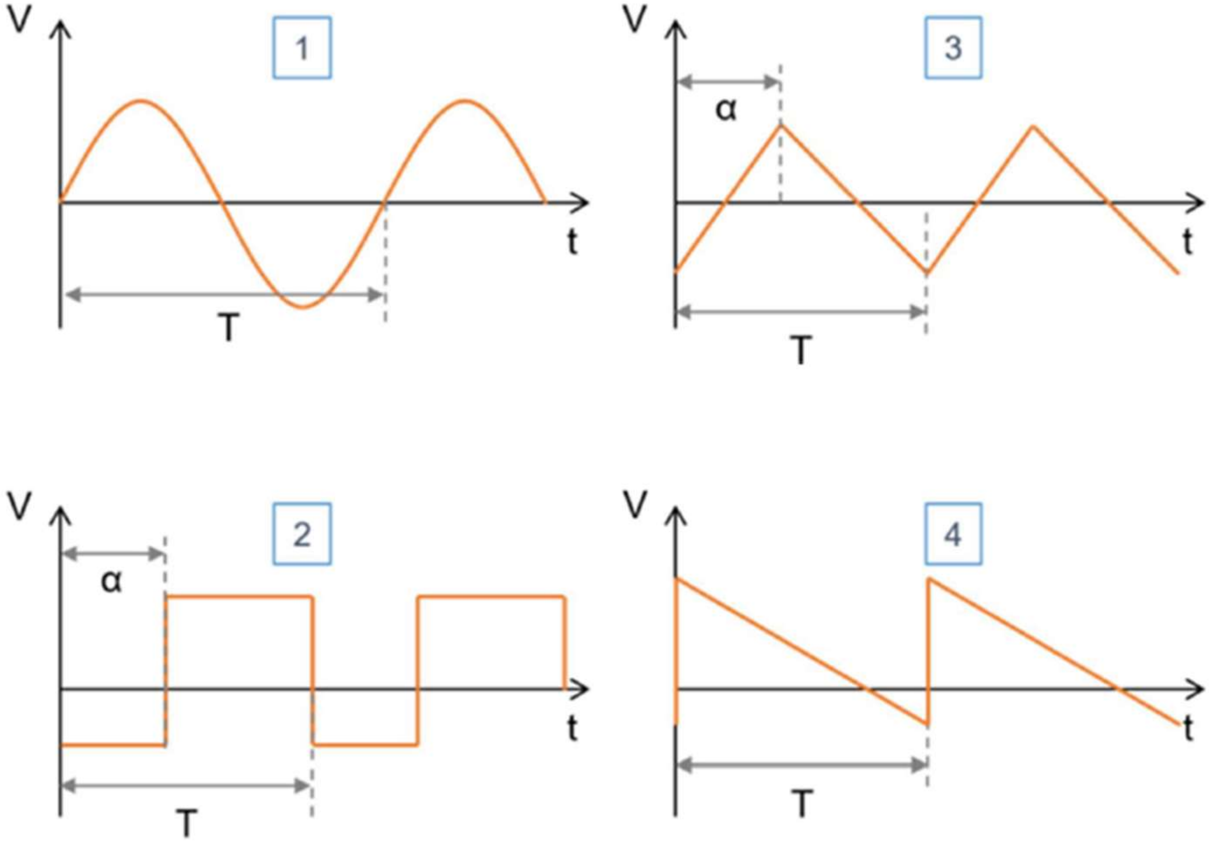
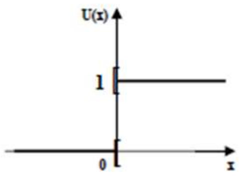
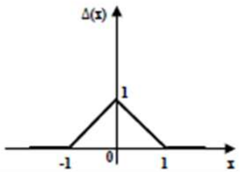
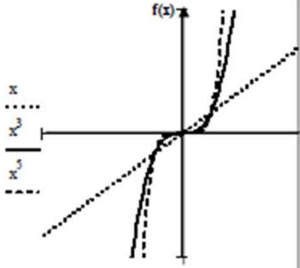
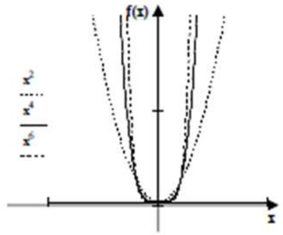
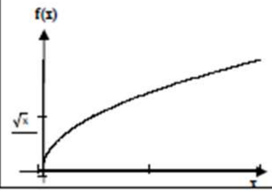
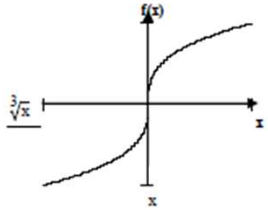
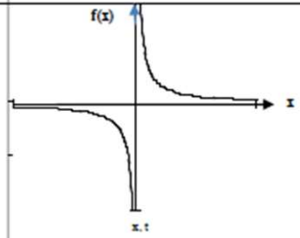
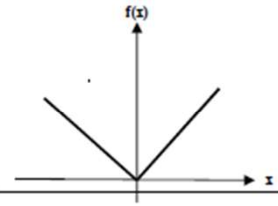
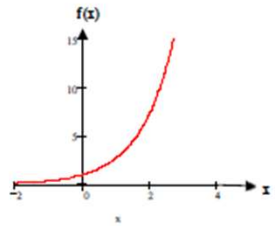
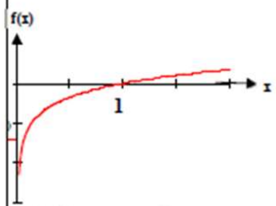
Chapitre 2 : Fonctions numériques à variable réelle.
Signaux du GEII



<u>Echelon-unité</u> : (Heaviside Φ) $U : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ $x \longmapsto U(x)$ avec $U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $U(\mathbb{R}) = \{0,1\}$ On dit que la fonction U est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 0. $\lim_{x\to 0^-} U(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^+} U(x) = 1$
<u>Triangle</u> : (notée aussi tri) $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow [0\,;1]$ $x \longmapsto \Delta(x)$ $\Delta(x) = \begin{cases} 1-\lvert x\rvert \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : [0 ; 1] On dit que la fonction triangle est continue sur $\mathbb{R}$.
<u>Puissance impaire</u> : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n+1}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
<u>Puissance paire</u> : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
<u>Racine carrée</u> : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

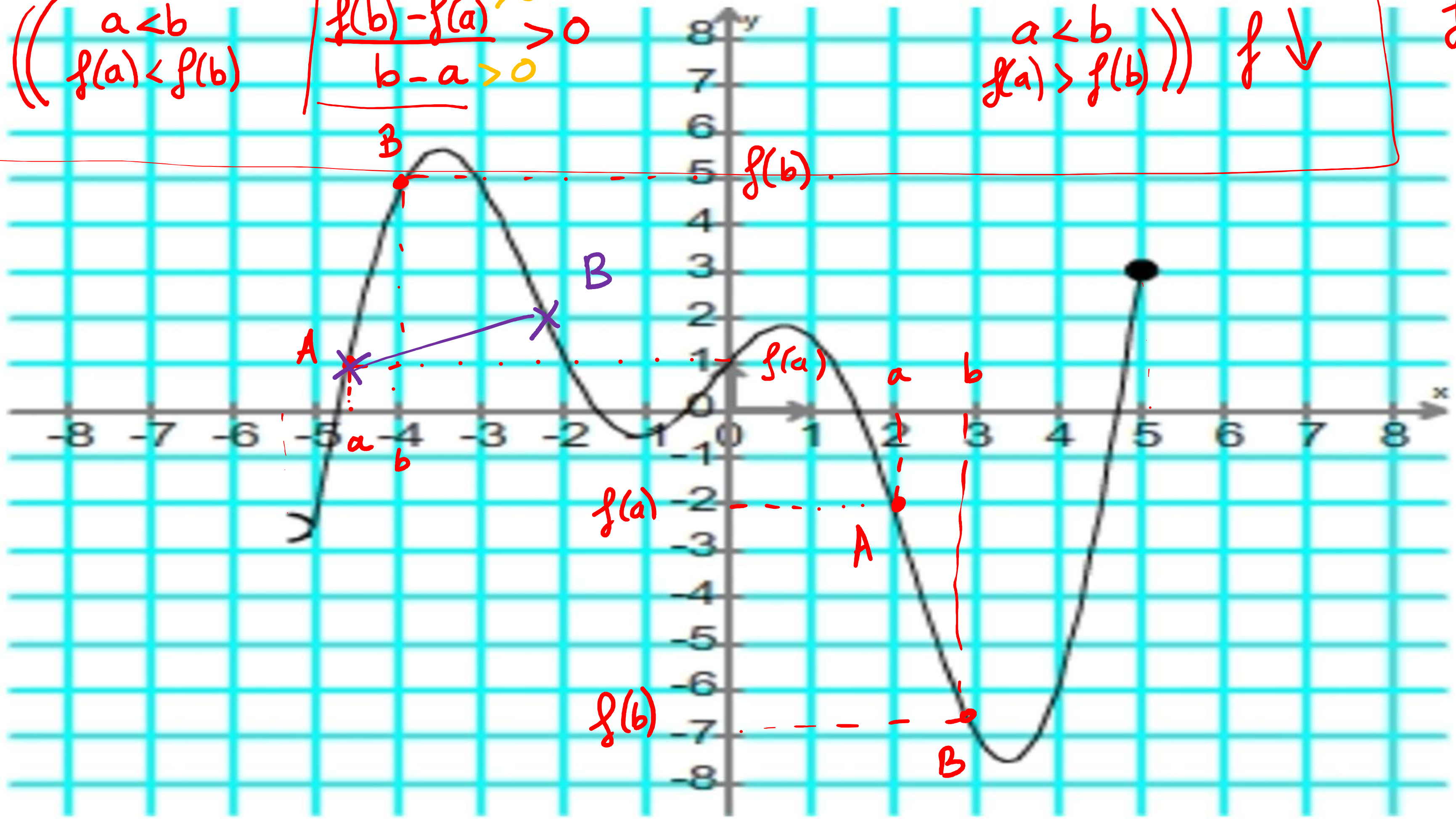
<u>Racine cubique</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
<u>Inverse</u> : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ $x \longmapsto f(x) = 1/x$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$ Ensemble image : $\mathbb{R}^*$ f est continue sur] 0 ;+∞[f est continue sur] −∞ ; 0[$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
<u>Valeur absolue</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \lvert x\rvert$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
<u>Exponentielle</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0\,;+\infty[$ $x \longmapsto f(x) = e^x$ $e^0 = 1$ $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $(e^a)^n = e^{a.n}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $]0\,;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
<u>Logarithme népérien</u> : $f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \ln(x)$ $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(a^n) = n.\ln(a)$	 $\ln(e^a) = a\ \forall a \in \mathbb{R}$ $e^{\ln(a)} = a\ \forall a > 0$	Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+^*$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

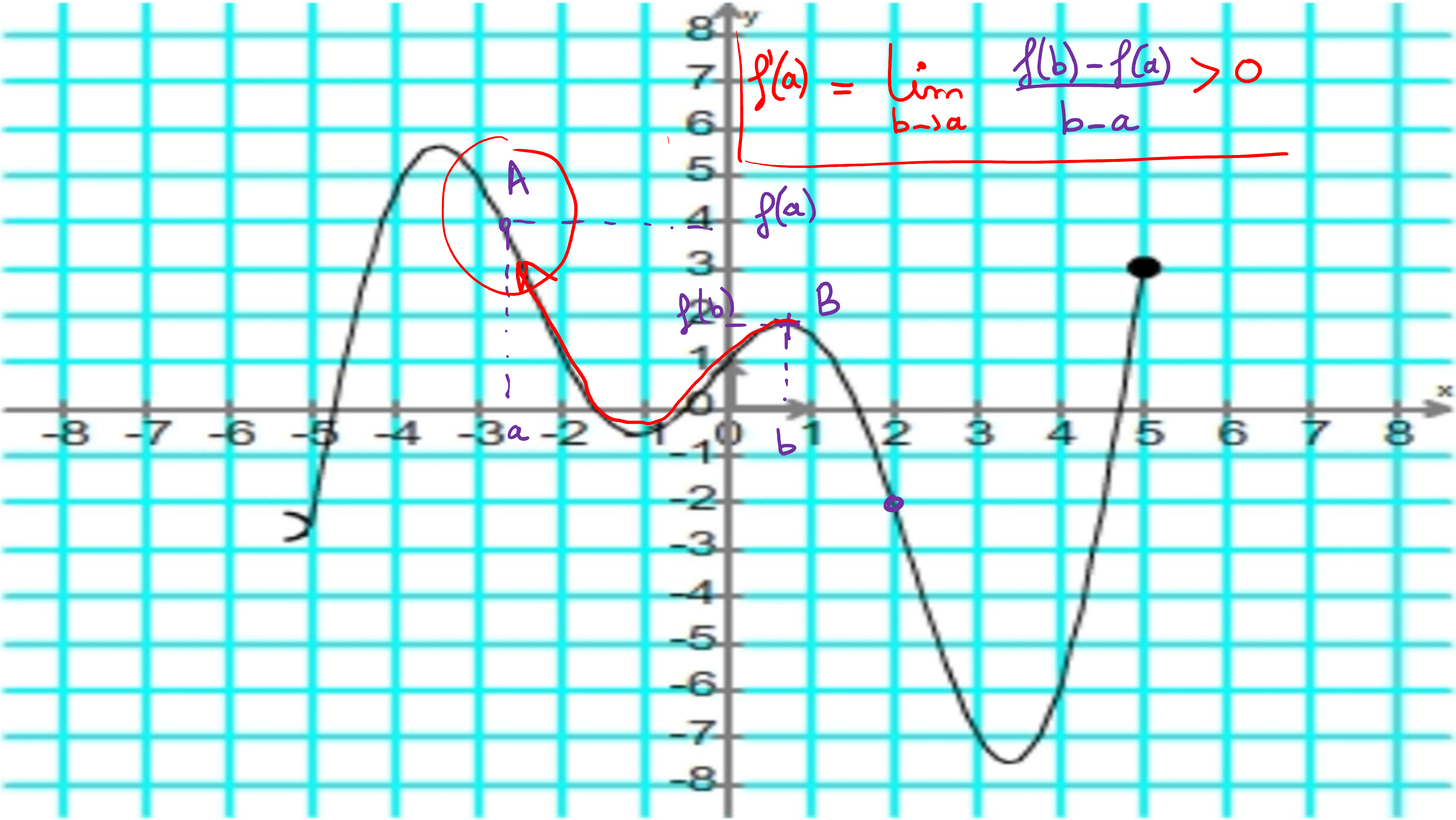
Problématique : comment déterminer le sens de variation d'une fonction ?

f est ↑ (($a < b$, $f(a) < f(b)$ | $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$; $f(b)-f(a) > 0$; $b-a > 0$

$a < b$, $f(a) > f(b)$)) f ↓

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$; $f(b)-f(a) < 0$; $b-a > 0$





$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$
A
B
f(a)
f(b)
a
b
x
y
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Page 14 chapitre 3

III. Dérivabilité

1) Définitions et opérations

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $\boxed{f'(a)}$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **existe et est finie. On la note alors** $\boxed{f'(a)}$

Page 14 chapitre 3

Exemples

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

Forme Indéterminée

✓ Soit f, la fonction définie par : $f(x) = x^2$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Dérivabilité de f en 3 : $L = \lim_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = "\frac{0}{0}"$ F.I

$L = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \to 3} x+3 = 6$ est finie, donc

f est dérivable en 3 et son nombre dérivé vaut : $f'(3) = 6$

Dérivabilité de f en a, réel quelconque : $L = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ FI

$L = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = \lim_{x \to a} x+a = 2a$ est finie donc f est

dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$ $\quad D_{f'} = \mathbb{R}$.

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

Page 14 chapitre 3

Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, lorsque f est dérivable en tout point a de I. On appelle alors fonction dérivée de f et on note f ', la fonction qui à tout élément a de I, associe son nombre dérivé $f'(a)$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors : αf, $f+g$, $f \times g$ et f/g (avec $g \neq 0$) sont dérivables sur I. (α est un nombre réel) et $(\alpha f)' = \alpha f'$, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f/g)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

$g \circ f = g(f) = \sin(u)$ $g' = \cos$

$(g \circ f)' = (\sin(u))' = \cos(u) \times u'$

$x^{-5} = \frac{1}{x^5}$

2) Formulaire $\boxed{\text{U est une fonction dérivable sur I.}}$

Cas particulier $U = x$ — Cas général

Page 16 chapitre 3

$(x^n)' = n.x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$	$x \to U$ $\quad (\mathbf{U^n})' = \mathbf{n.U'.U^{n-1}} \quad , \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ $U' = 1$, $U = x$ $= (x^{1/2})' = \frac{1}{2} . x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{x}}$	$(\sqrt{\mathbf{U}})' = \frac{\mathbf{U'}}{2\sqrt{\mathbf{U}}} \quad , \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ $= (x^{-1})' = -1.x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{\mathbf{U}}\right)' = \frac{-\mathbf{U'}}{\mathbf{U^2}} \quad , \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}^*$
$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\mathbf{e^U})' = \mathbf{U'.e^U} \quad , \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$(\mathbf{\ln(U)})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{U}} \quad , \mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$

Page 16 chapitre 3

$(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(\sin(U))' = U'.\cos(U) \quad , \quad U(I) \subseteq \mathbb{R}}$
$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$\mathbf{(\cos(U))' = -U'.\sin(U) \quad , \quad U(I) \subseteq \mathbb{R}}$
$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbf{(\tan(U))' = \frac{U'}{\cos^2(U)} = \left(1 + \tan^2(U)\right).U'}$ $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Page 16&17 chapitre 3

<u>Exemples</u>

✓ $f(x) = (2x-3).\cos x$

$(U.V)' = U'V + UV'$

$D_f =$ $\mathbb{R}$

$f'(x) = 2.\cos x + (2x-3).(-\sin x) = 2\cos x - (2x-3)\sin x$

$D_{f'} =$ $\mathbb{R}$

sinus cardinal de x et se note $\mathrm{sinc}(x)$

✓ $g(x) = \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

$D_g =$ $\mathbb{R}^*$

$g'(x) = \frac{(\sin x)'.x - \sin x.(x)'}{x^2} = \frac{x.\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$

$D_{g'} = \mathbb{R}^*$

Page 17 chapitre 3

$D_{g'} = \mathbb{R}^*$

✓ $i(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$

$\boxed{(\underbrace{\alpha}_{\text{constante}} . U)' = \alpha . U'}$

$(\cos U)' = -U' . \sin U$

$D_i = \mathbb{R}$

ici $U = \omega t + \varphi \Rightarrow U' = \omega$

$i'(t) = V_{eff}\sqrt{2} . (\cos(\omega t + \varphi))' = -V_{eff}\sqrt{2} . \omega . \sin(\omega t + \varphi)$

$D_{i'} = \mathbb{R}$.

✓ $h(t) = (t^2+5)^{10}$ $(U^n)' = n.U^{n-1}.U'$

Page 17 chapitre 3

$D_h =$ $\mathbb{R}$

$h'(t) = 10 \times 2t \times (t^2+5)^9 = 20t\,(t^2+5)^9$

$U = t^2+5 \Rightarrow U' = 2t$

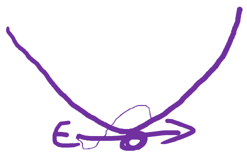
$D_{h'} =$ $\mathbb{R}$

✓ A l'aide de la définition du nombre dérivé du sinus en 0, calculer : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \frac{0}{0}$ F.I

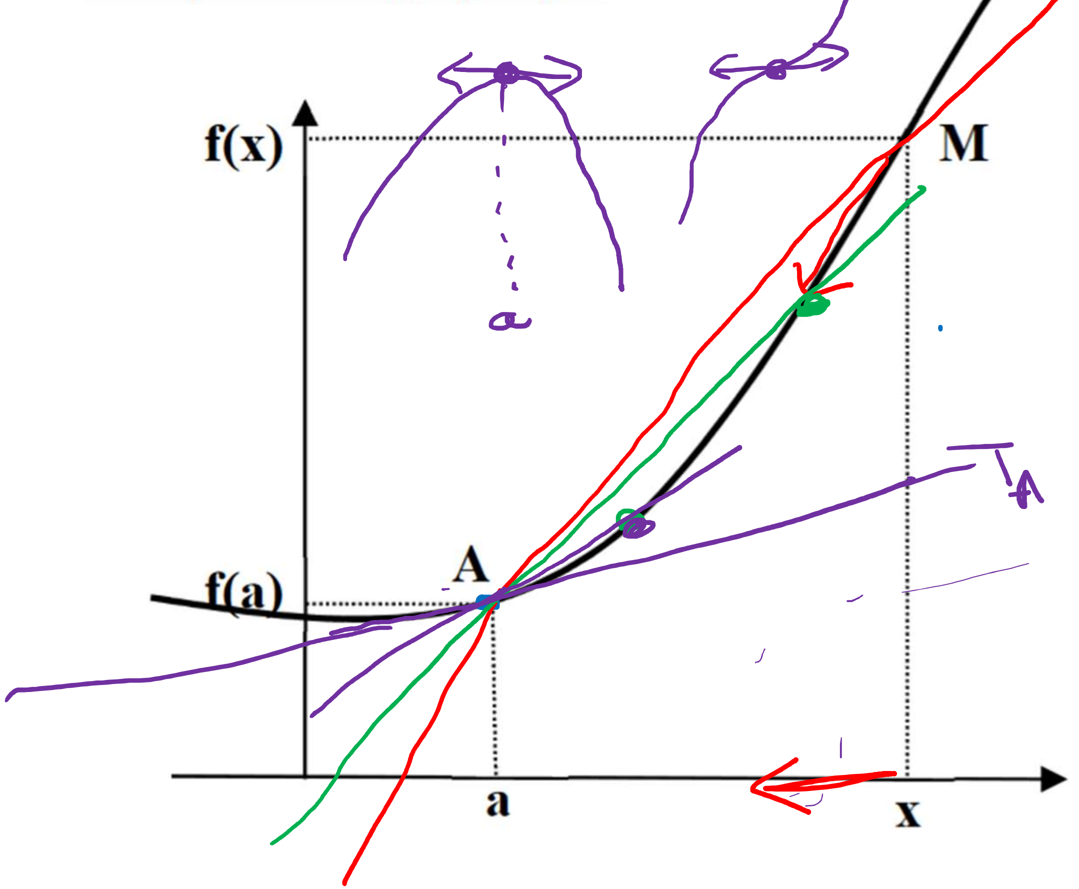
$\lim\limits_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} = f'(a)$ si f est dérivable en a avec $\begin{cases} f(t) = \sin t \Rightarrow f'(t) = \cos t \\ a = 0 \end{cases}$

f est dérivable en 0 donc : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t - \overset{0}{\sin 0}}{t} = f'(0) = \cos 0 = 1$

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$



Interprétation graphique



$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}$$ est la pente de (AM)

$x \to a \Leftrightarrow M \to A$

$(AM) \longrightarrow T_A$ tangente

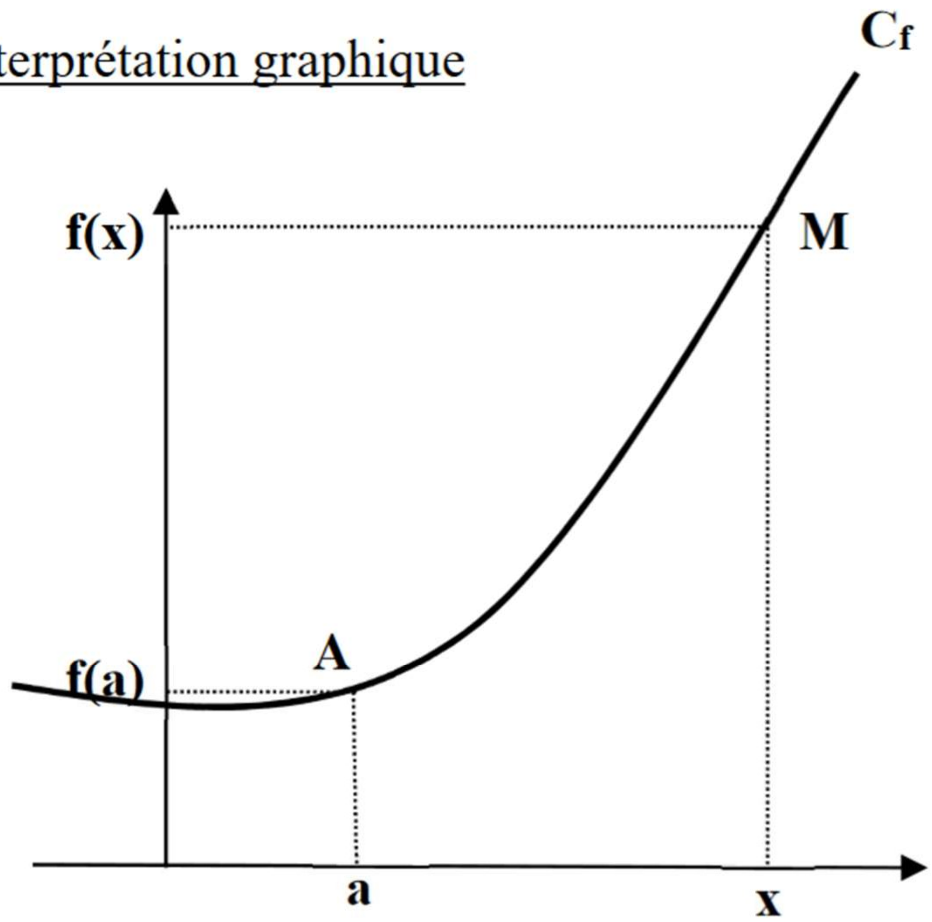
$f'(a)$ est la pente de T_A

$\boxed{f'(x)=0}$ $\quad y = \cancel{mx}+p$

$\downarrow$ tangente horizontale

Interprétation graphique

Page 18 chapitre 3



$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite (AM)
Lorsque x tend vers a, M tend vers A le long de la courbe, et la droite (AM) se rapproche de la droite T_a, qui est la tangente à la courbe au point A.

Conclusion :

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ **est la pente de la tangente à la courbe au point A(a,f(a)).**

$T_a : y = mx + p$ avec $m = f'(a)$

p ?

Page 18 chapitre 3

<u>Conséquence</u> Equation de la tangente T_a

$T_a : y = f'(a)x + p$

p ? $A(a; f(a)) \in T_a \iff f(a) = f'(a) \cdot a + p$

$\iff p = f(a) - f'(a) \cdot a$

donc $T_a : y = \underbrace{f'(a)}_{} \cdot x + f(a) - \underbrace{f'(a) \cdot a}_{}$

$T_a : y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Page 19 chapitre 3

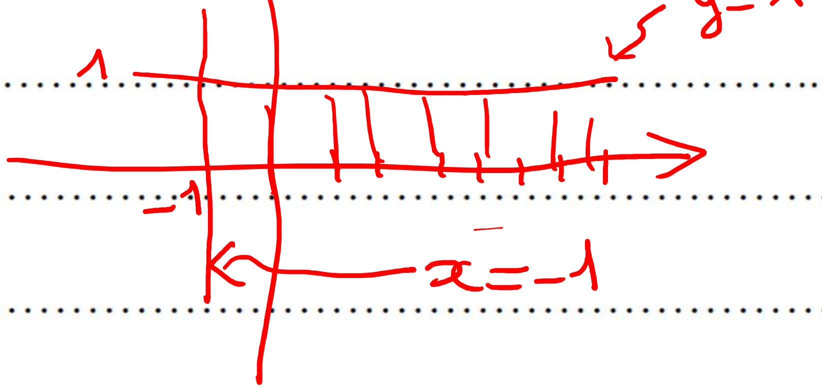
Exemples

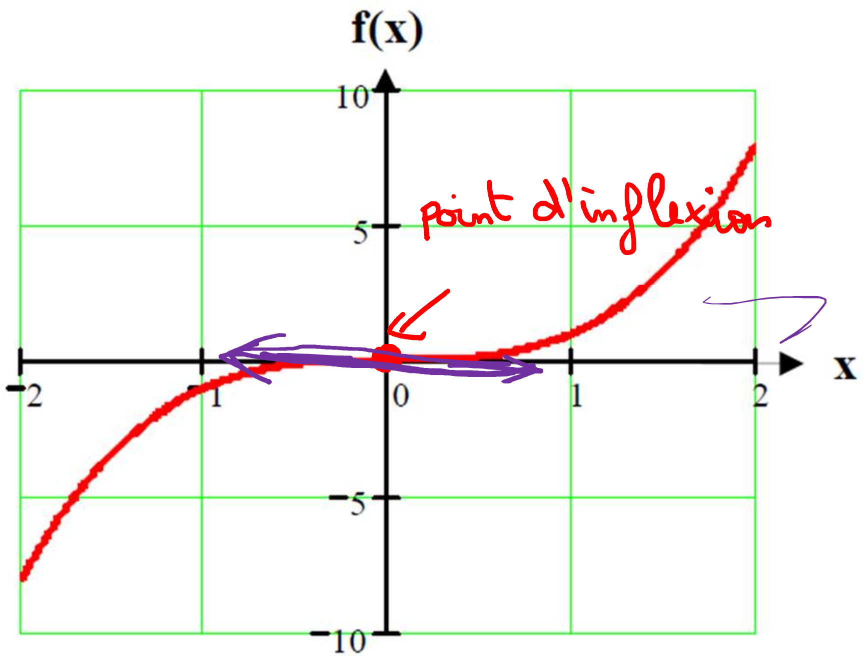
- ✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = x^3$

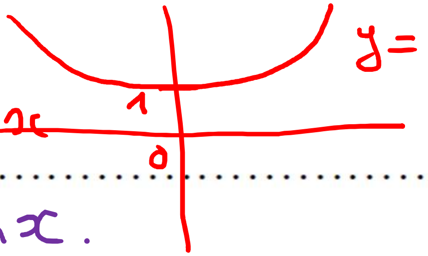
$T_a : y = f(a) + (x-a).f'(a)$

$T_0 : y = f(0) + x.\underbrace{f'(0)}_{=0}$ ici $f(x) = x^3$ et $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

$T_0 : y = 0$







$y = \text{ch}\,x$.
"chaînette"

$(\text{ch}\,x)' = \text{sh}\,x$

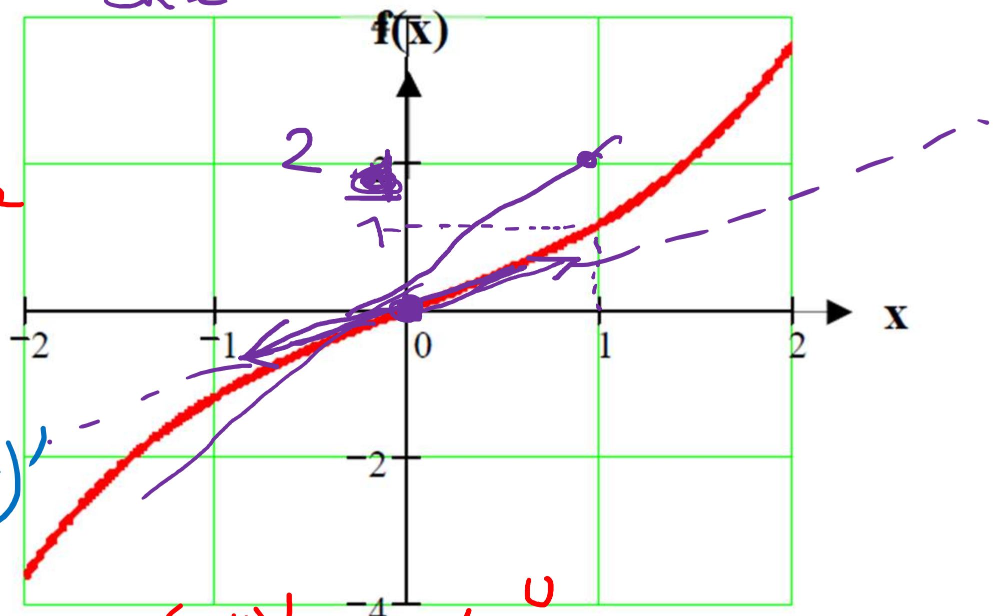
$(\text{sh}\,x)' = \text{ch}\,x$.

$\text{ch}\,x^2 = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2$ Cosinus hyperbolique.

$\text{th}\,x = \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}$.

✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = \text{sh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

sinus hyperbolique



$T_0 : y = f(0) + x f'(0)$

$f(0) = \frac{e^{0} - e^{0}}{2} = 0$

$f'(x) = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)'$

$(e^u)' = u' e^u$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \text{ch}\,x$

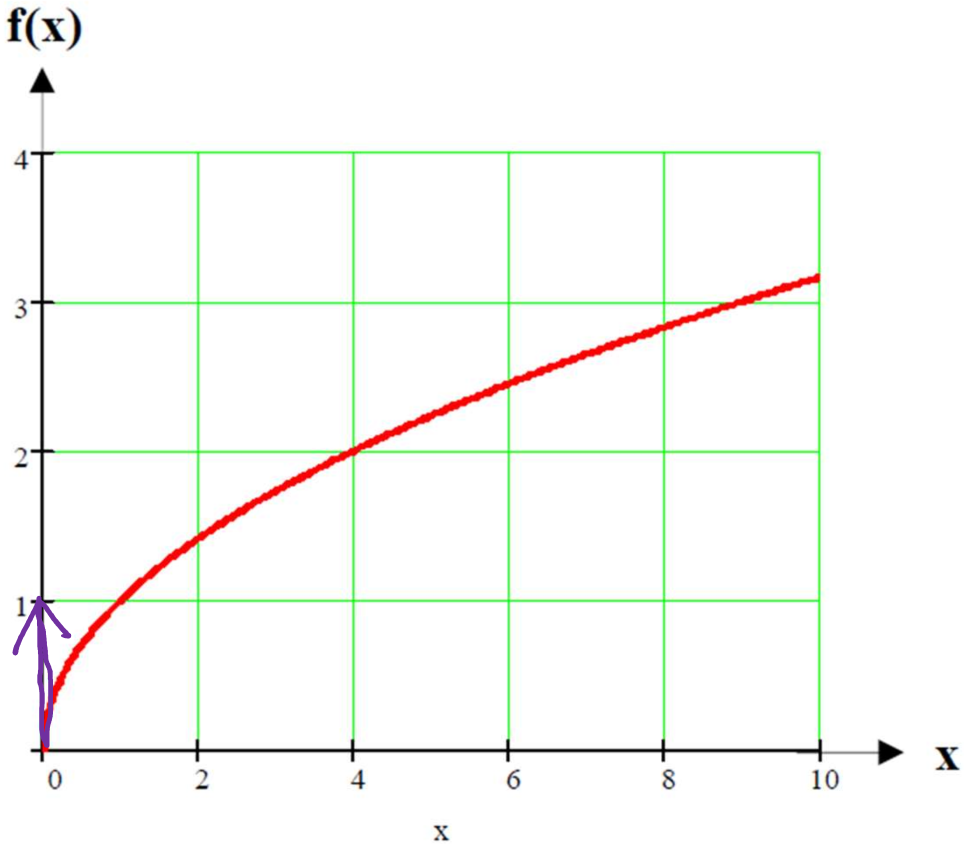
$f'(0) = \frac{1}{2}\left(e^{0} + e^{0}\right) = \frac{2}{2} = 1$

$T_0 : y = x$

✓ <u>La fonction racine carrée</u> n'est pas dérivable en 0.

$f(x) = \sqrt{x} \quad \forall\, x \geq 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall\, x > 0$



$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty$$

En O, la tangente à la courbe est donc verticale tournée vers les ordonnées positives.

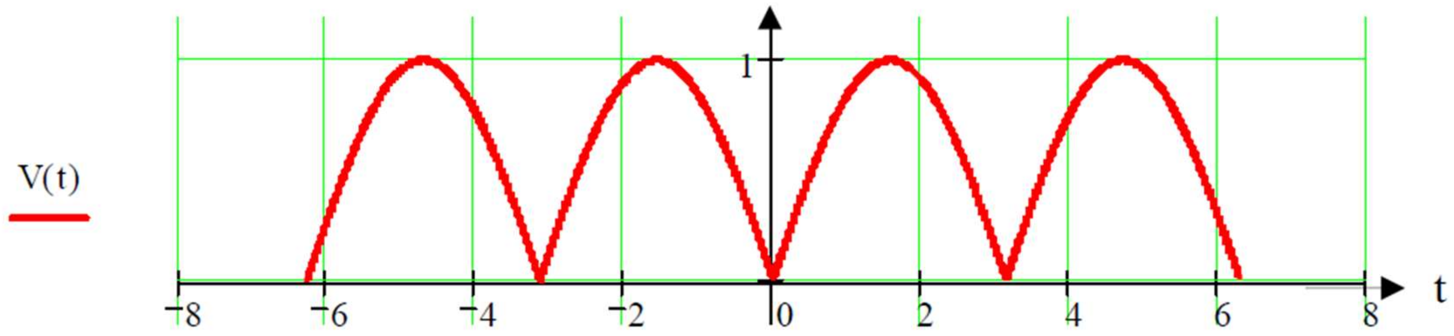
Page 20 chapitre 3

- ✓ Redressement double alternance : $V(t) = |\sin(t)|$.

Dérivabilité de V en 0 : ……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………



………………………………………………………t………………………………………………

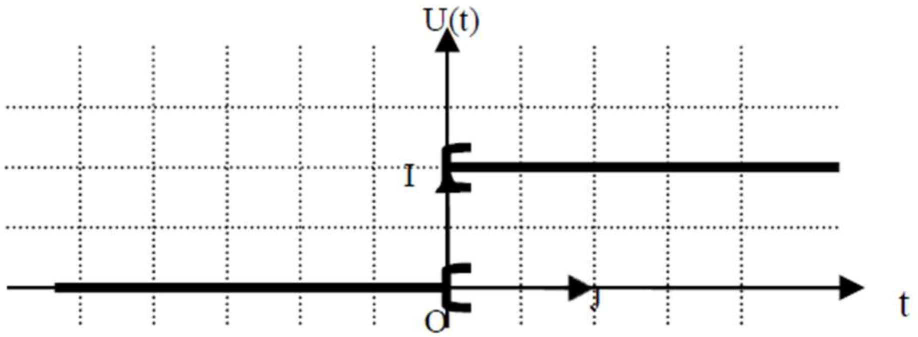
………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

✓ U, la fonction échelon-unité définie et représentée ci-dessous est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

Page 20 chapitre 3

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}.$$



....

....

....

....

Page 26 chapitre 3

$$\frac{0}{0} \quad , \quad \frac{\infty}{\infty} \quad , \quad 0 \cdot \infty \quad , \quad \infty - \infty$$

$$0^0 \quad , \quad \infty^0 \quad , \quad 1^\infty$$

FI

$\frac{0}{0}$

$\frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty$

$0 \times \infty$

Page 26 chapitre 3

Partie B : Calcul de limites

<u>Formes indéterminées</u> <u>FI</u> Soit x_0, un nombre réel ou $\pm\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$	L	L	$\pm\infty$	∞	∞	$\pm\infty$	0	0	L
et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$	L' $\neq 0$	$\pm\infty$	L' $\neq 0$	∞	$-\infty$	0	$\pm\infty$	0	0
alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) =$	L+L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	L
et $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) =$	LL'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	$-\infty$	FI	FI	0	0
et $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) =$	$\frac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$	FI	FI	$\pm\infty$	0	FI	$\pm\infty$

<u>Remarque</u> $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \exp\big(g(x).\ln(f(x))\big)$ cette écriture permet de « lever » les formes indéterminées suivantes : $"L^{\infty}", "0^0"$ et $"\infty^0"$

Voici quelques techniques permettant de « lever » une forme indéterminée :

Technique 1 : Croissance comparée

Page 26 chapitre 3

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$

Théorèmes Soient : $0 < \alpha < \beta$

$$\ln(x) \underset{\infty}{<<} x^{\alpha} \underset{\infty}{<<} x^{\beta} \underset{\infty}{<<} e^{x}$$

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = x.e^{x} - x^{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = "\infty - \infty"$ F.I

$e^{x} \underset{\infty}{>>} x^{2}$

Lycée $xe^{x}\left(1 - \frac{x^{2}}{xe^{x}}\right)$

$= \underbrace{xe^{x}}_{\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{x}{e^{x}}}_{\to 0}\right) \underset{x\to+\infty}{\Longrightarrow} +\infty$

IUT $e^{x} \underset{\infty}{>>} x^{2} \Leftrightarrow xe^{x} \underset{\infty}{>>} x^{2}$ $\to 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x} - \cancel{x^{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x} = +\infty$

Page 26 chapitre 3

Calculer $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(4x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \text{“}\dfrac{\infty}{\infty}\text{”}$ F.I

Comme $\ln x \underset{\infty}{\ll} x$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\ln(4x) = \ln 4 + \ln x$

$f(x) = \dfrac{\ln 4 + \ln x}{x} = \underbrace{\dfrac{\ln 4}{x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} + \underbrace{\dfrac{\ln x}{x}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0}$ car $\ln x \underset{\infty}{\ll} x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

<u>Technique 2</u> : Expression conjuguée

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ F.I

Page 27 chapitre 3

$f(x)=\dfrac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}}^{A}-\overbrace{1}^{B}}{x}\times\dfrac{\overbrace{\sqrt{1+x^2}+1}^{A+B}}{\sqrt{1+x^2}+1}=\dfrac{\overbrace{1+x^2}^{A^2}-\overbrace{1}^{B^2}}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\dfrac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ donc $\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{0}{2}=0$

$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$

Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{\overbrace{\sqrt{x^2+3x-3}}^{A}\overbrace{-x}^{-B}}{x-1}$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ F.I

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1}\times\dfrac{\sqrt{x^2+3x-3}+x}{\sqrt{x^2+3x-3}+x}=\dfrac{\overbrace{x^2+3x-3-x^2}^{A^2-B^2}}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x-3}+x\right)}=\dfrac{\overbrace{3x-3}^{3(\cancel{x-1})}}{\cancel{(x-1)}\sqrt{\dots}}$

$f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+3x-3}+x}$ $\qquad \lim_{x\to 1} f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{3}{2}$

Page 27 chapitre 3

Technique 3 : **Théorèmes de comparaison**

Soient f, g et h trois fonctions définies sur [a,b[où b est un réel ou $\pm\infty$

1) Si $\forall x \in [a,b[\ f(x) \le g(x)$ **et** $\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$, **alors** $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$

2) Si $\forall x \in [a,b[\ f(x) \ge g(x)$ **et** $\lim_{x\to b} g(x) = \infty$, **alors** $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$

3) Si $\forall x \in [a,b[\ |f(x)| \le g(x)$ **et** $\lim_{x\to b} g(x) = 0$, **alors** $\lim_{x\to b} f(x) = 0$

4) Si $\forall x \in [a,b[\ h(x) \le f(x) \le g(x)$ **et** $\lim_{x\to b} h(x) = \lim_{x\to b} g(x) = L$, **alors** $\lim_{x\to b} f(x) = L$ (théorème des gendarmes)

Exemples : Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = ?$ car ~~sin~~ x n'a pas de limite en $+\infty$.

On sait que : $-1 \le \sin x \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

alors : $-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$

Comme $\lim_{\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors d'après le th. des Gendarmes $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Technique 4 : Equivalence

Page 29 chapitre 3

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonct… en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. On note alors : $f(x)\underset{x_0}{\sim}g(x)$

Exemples : Montrer que les fonctions f et g suivantes sont équivalentes en ∞ :

" Cosinus hyperbolique "

$ch(x)$

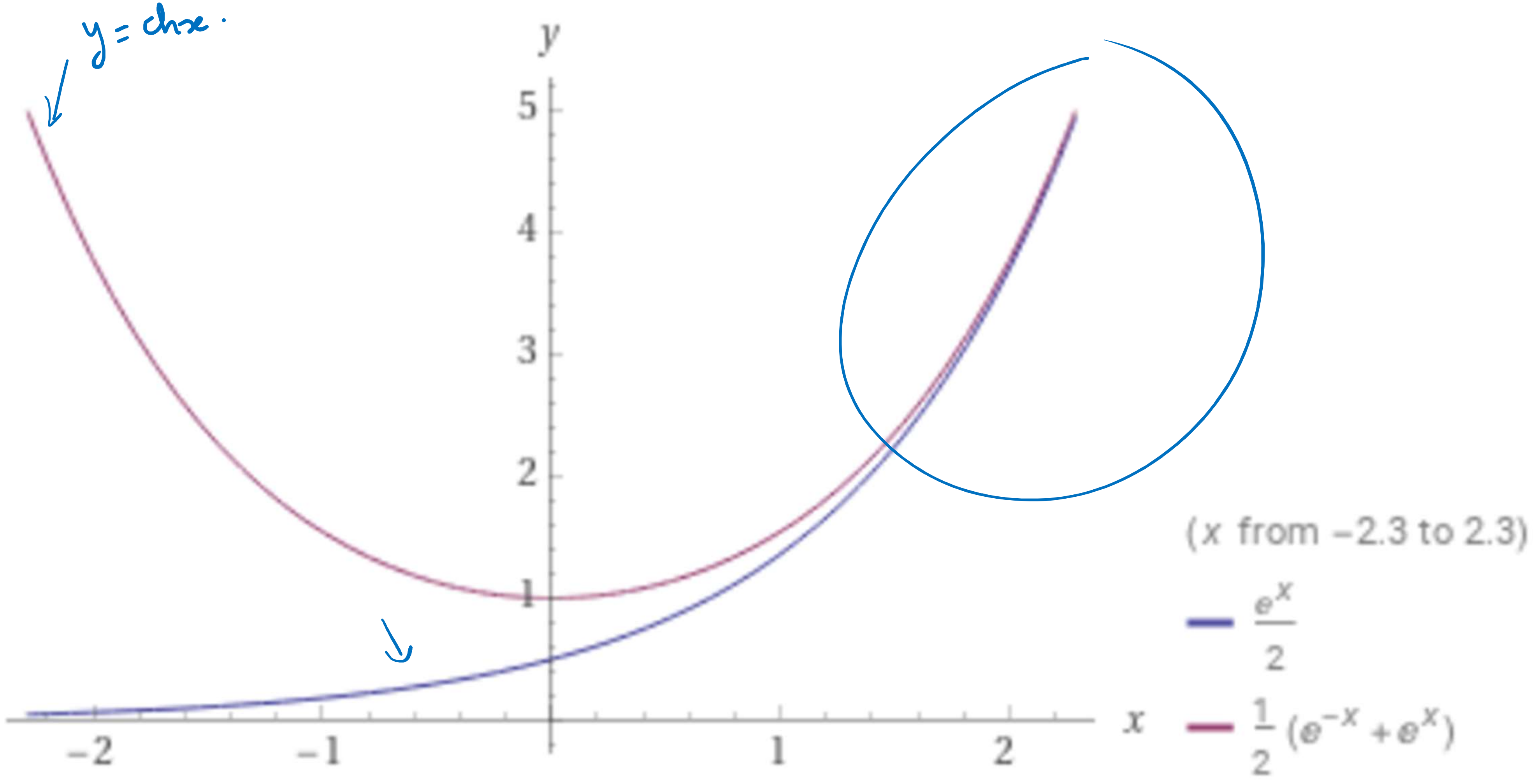
$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ et } g(x)=\frac{e^x}{2} \ :$$

"$\frac{\infty}{\infty}$" FI

$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}{\frac{e^x}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x}$$

$$\frac{e^a}{e^b}=e^{a-b}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}+\frac{e^{-x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}1+e^{-2x}=1 \text{ donc } f(x)\underset{+\infty}{\sim}g(x)$$


y = chx.
y
5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
x
(x from −2.3 to 2.3)
$\frac{e^x}{2}$
$\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})$

Page 29 chapitre 3

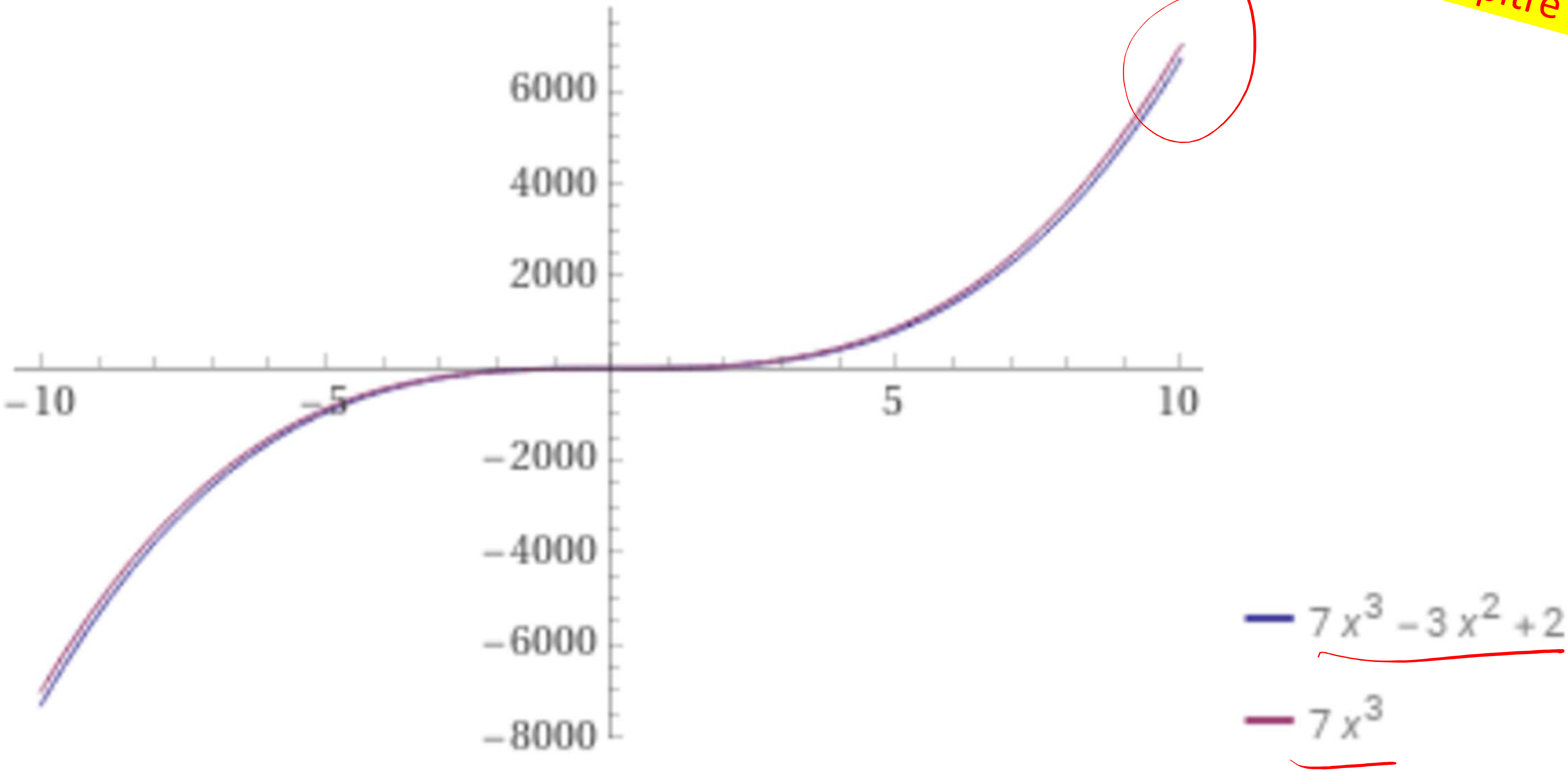
Chercher un équivalent de f en ∞ où $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2$

$f(x) \underset{\substack{\infty \\ -\infty ??}}{\sim} 7x^3$ car $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{7x^3} = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{7x^3 - 3x^2 + 2}{7x^3}$

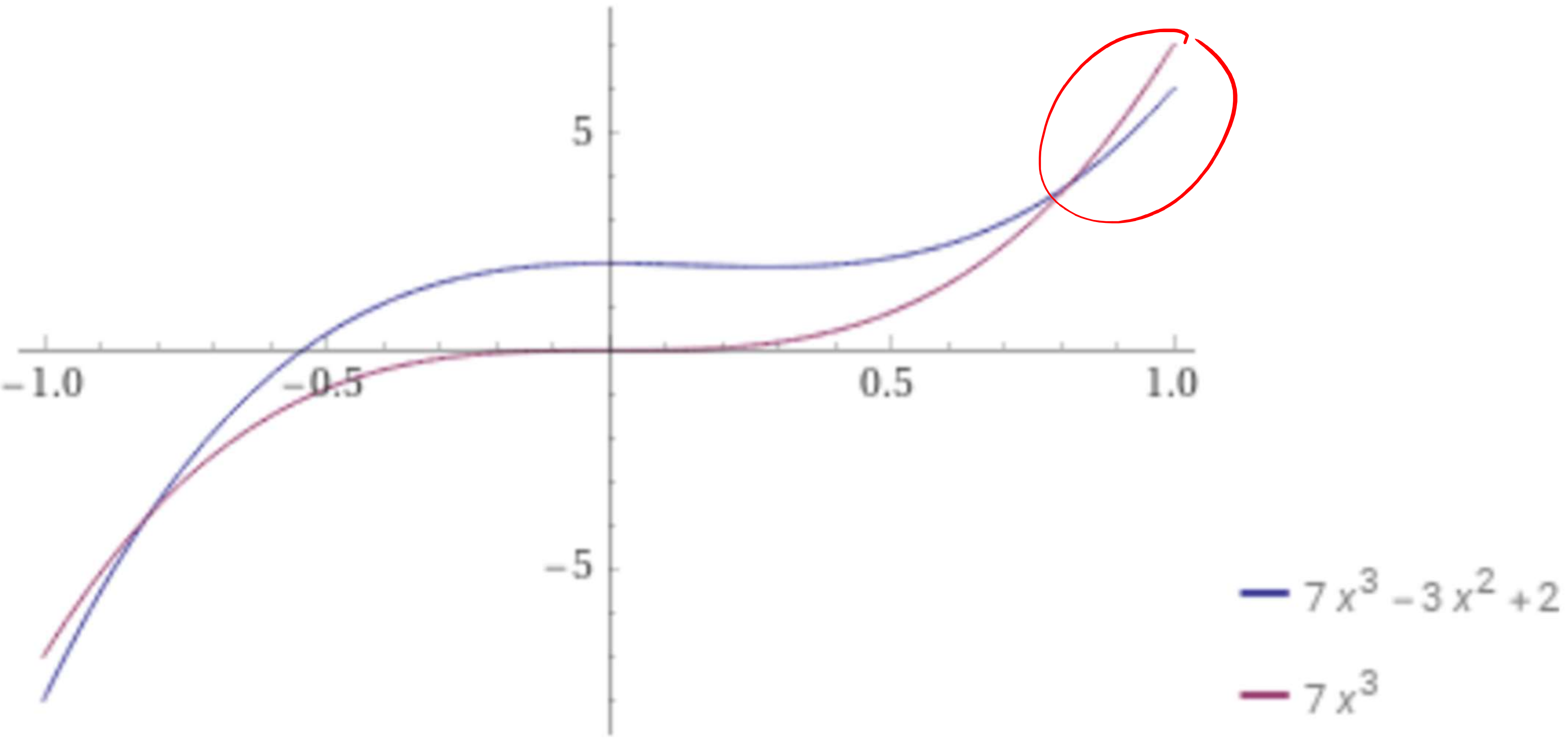
$= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{7x^3}{7x^3} - \frac{3x^2}{7x^3} + \frac{2}{7x^3}$

$= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \left(1 - \frac{3}{7x} + \frac{2}{7x^3}\right) = 1$

Page 29 chapitre 3



Page 29 chapitre 3



Page 29 chapitre 3

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

$$f(x) = 2x^2 - 7x^8 + 5x \underset{0}{\sim} 5x \quad \text{car} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{5x} \overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{” FI}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{5x} - \frac{7x^8}{5x} + 1$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{5} - \frac{7x^7}{5} + 1$$

$$= 1.$$

Page 29 chapitre 3

Si f est dérivable en x_0, alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} \underbrace{f(x_0)+(x-x_0).f'(x_0)}$

équation de la tangente à C_f en x_0.

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0)+x.f'(0)$

Compléter :

$\sin(x) \underset{0}{\sim} \underbrace{\sin 0}_{0} + x.\underbrace{\cos 0}_{1}$ donc $\boxed{\sin x \underset{0}{\sim} x}$

$e^x \underset{0}{\sim} \underbrace{e^0}_{1} + x.\underbrace{e^0}_{1}$ donc $\boxed{e^x \underset{0}{\sim} 1+x}$

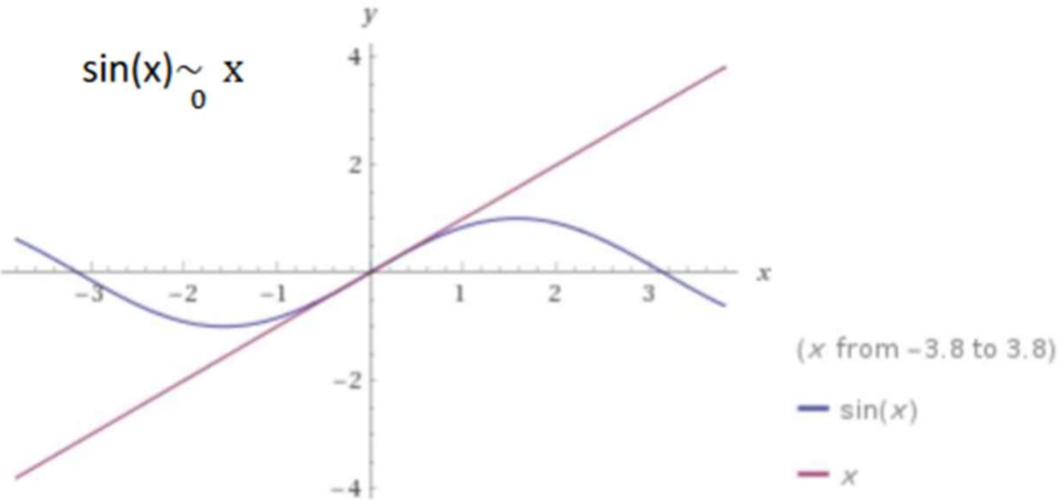
$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} \ln 1 + x.1$ donc $\boxed{\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x}$

$f(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ $\quad f(0) = \ln(1+0) = 0$

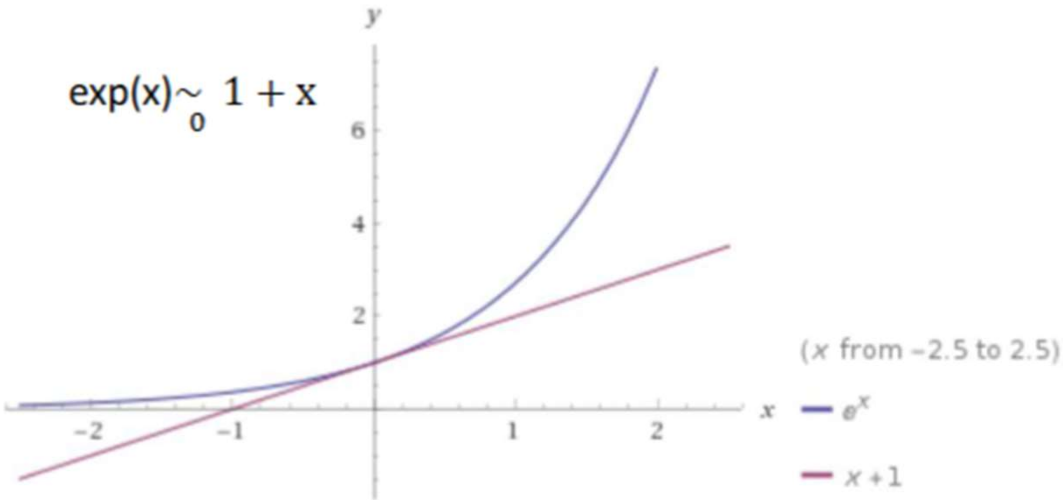
$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} f(0)+x.f'(0)$ donc $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1+\frac{x}{2}}$

$f(x)$. $\quad f(0) = \sqrt{1} = 1 \quad f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$

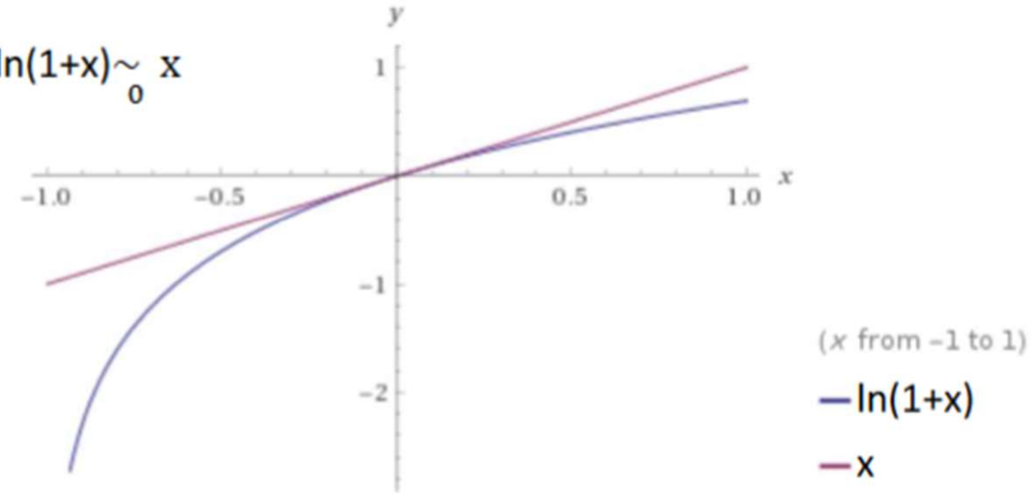
$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$$



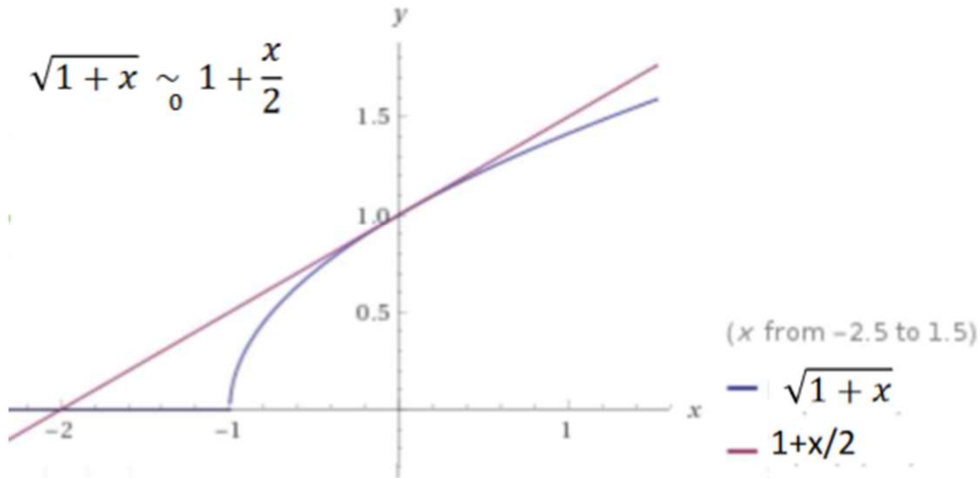
$$\exp(x) \underset{0}{\sim} 1 + x$$



$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$



$$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{x}{2}$$



$\underbrace{(1+x)^{\alpha}}_{=f(x)} \underset{0}{\sim} 1 + \alpha x$

Page 30 chapitre 3

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x . f'(0)$ $\qquad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} . \underbrace{(1+x)'}_{1} \Rightarrow f'(0) = \alpha$

$\tan(x) \underset{0}{\sim} \tan 0 + x(1+\tan^2 0)$ donc $\tan x \underset{0}{\sim} x$.

$f'(x) = 1+\tan^2 x$

Ne pas écrire :

$\cos(x) \underset{0}{\sim} \underbrace{\cos 0}_{1} + x(-\underbrace{\sin 0}_{0}) \Longrightarrow \cos x \underset{0}{\sim} 1$:

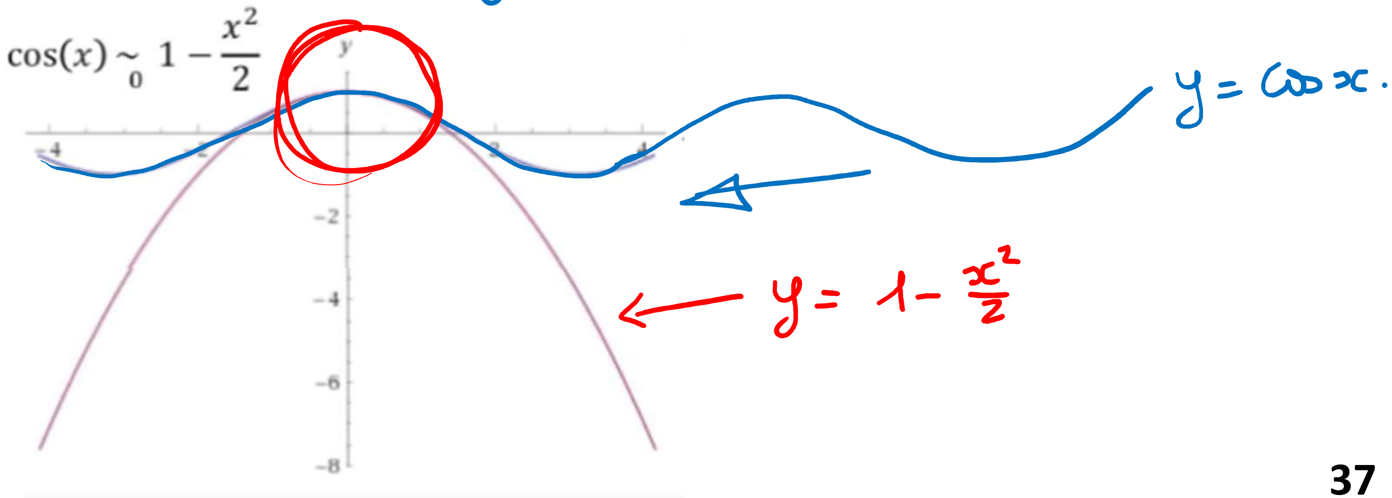
DL en 0.

Page 30 chapitre 3

Si f est 2 fois dérivable en x0, alors : $\underbrace{\underbrace{f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0)+(x-x_0).f'(x_0)}}_{0} + \frac{(x-x_0)^{2}}{2}.f''(x_0) +$

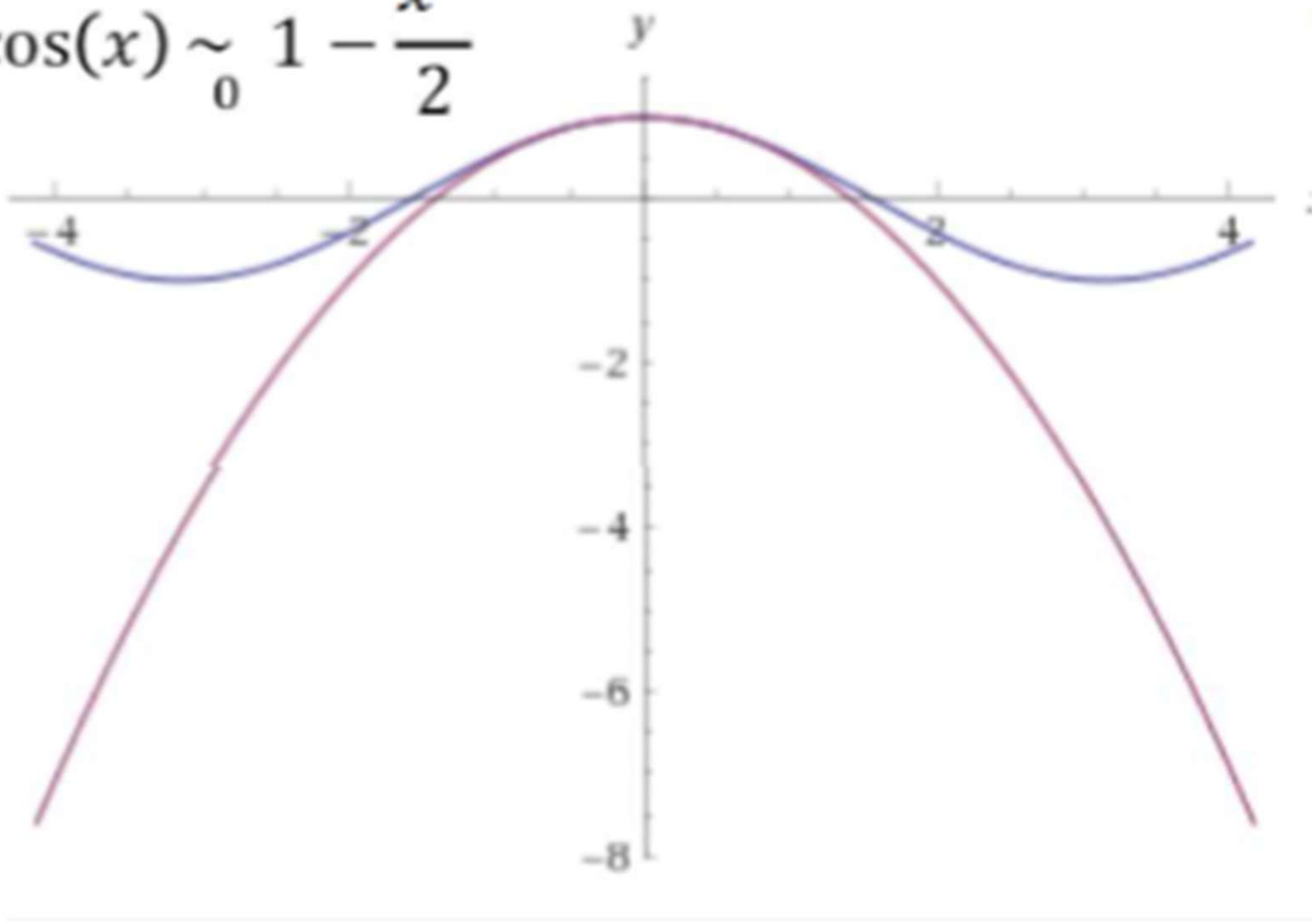
$\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 + 0 + \frac{x^2}{2} f''(0)$ donc $\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$

$f'(x) = -\sin x$ $f''(x) = -\cos x$ $\Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1$



Page 30 chapitre 3

$$\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$$



Page 30 chapitre 3

Opérations

- Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f_1.f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1.g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- f, g, h sont trois fonctions,

$$\text{Si } f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X) \text{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = X_0 \text{, alors } f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$$

Page 30 chapitre 3

Exemples :

Compléter : $f(x) = \dfrac{-x^7+3x^2}{x(x-1)^3} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{-x^7}{x \cdot x^3} = \dfrac{-x^7}{x^4} = -x^3$

(Remarque : donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$)