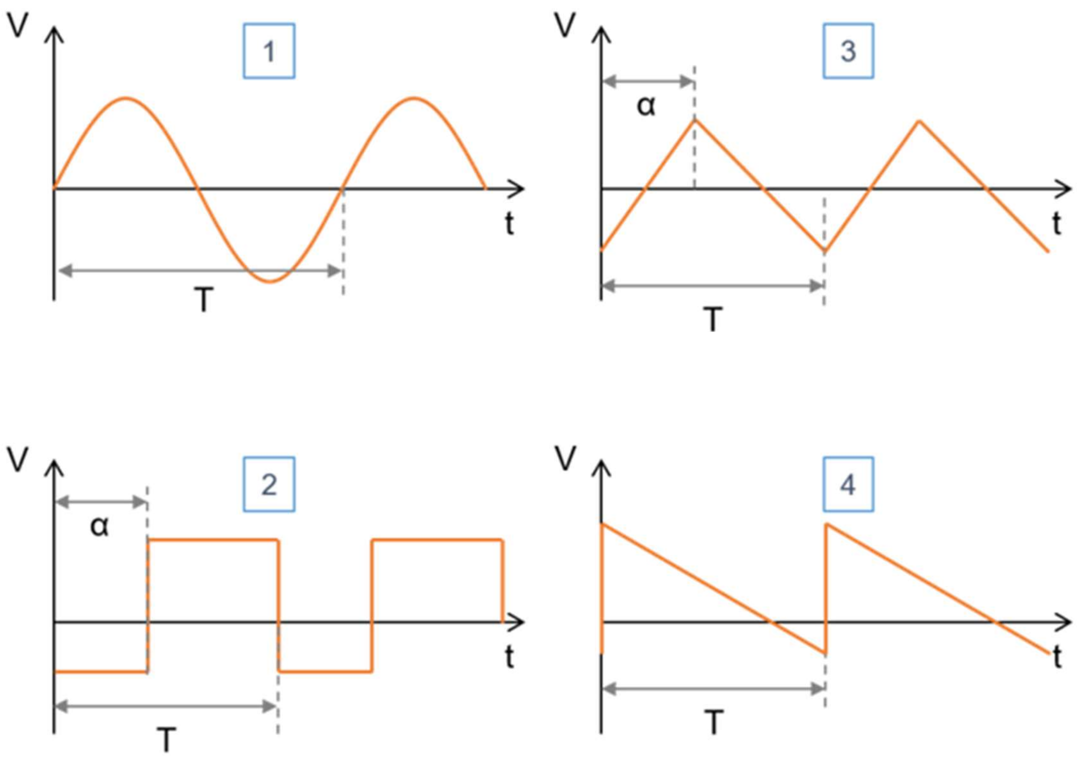
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R1-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 3 : Fonctions numériques à variable réelle.
Signaux du GEII



Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr
Bureau A042 - 04 94 14 21 15

UNIVERSITÉ DE TOULON

Table des matières

Notes

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Partie A : Etude d'une fonction

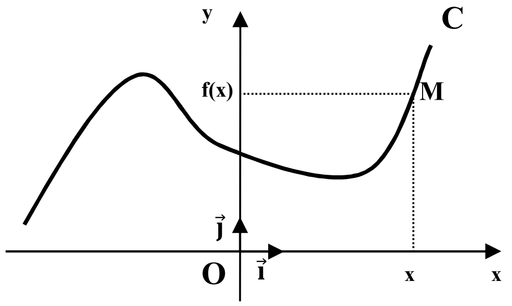
I. Notions de base

1) Définitions et notations

Une fonction f, est définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, si à tout x de D on peut associer un unique nombre noté f(x), et appelé image de x par f.

On écrit $\quad f : \begin{array}{l} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$

D est appelé l'ensemble de définition de f, on le note aussi D_f.



On munit le plan d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
La courbe C représentant f est l'ensemble des points M de coordonnées M (x , f(x)).

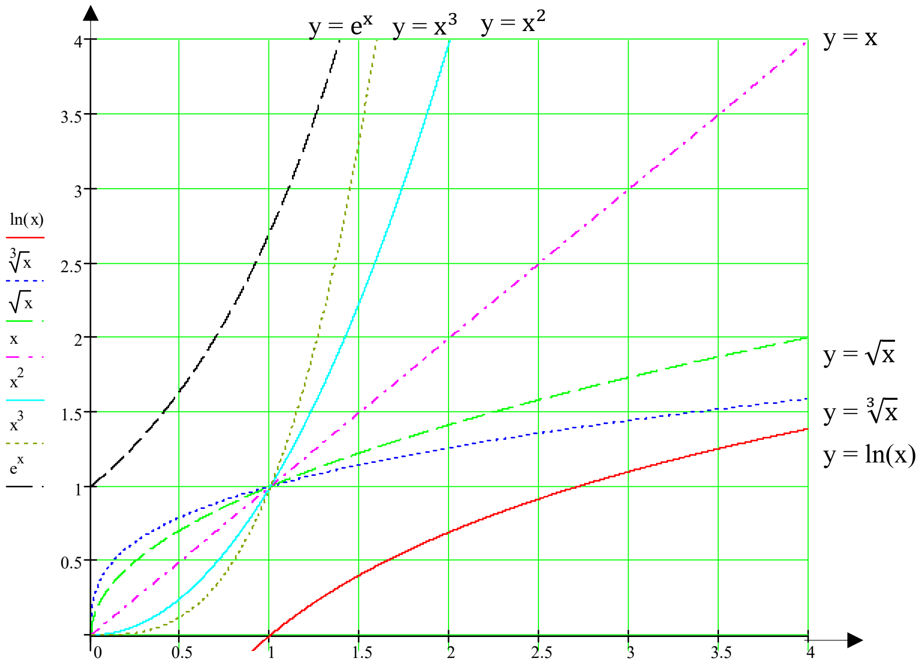
$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + f(x)\,\vec{j}$

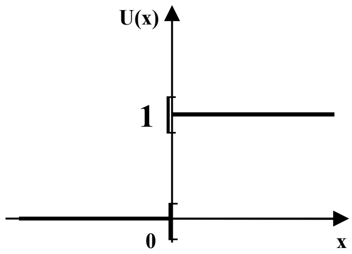
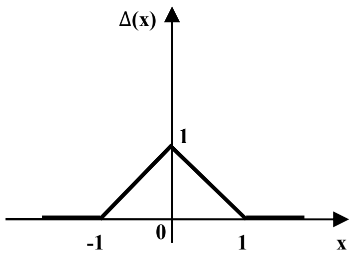
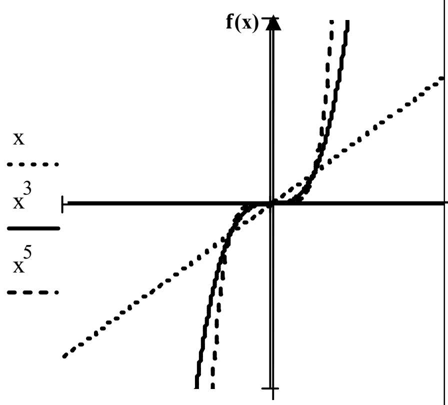
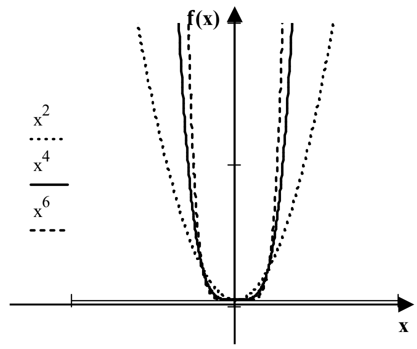
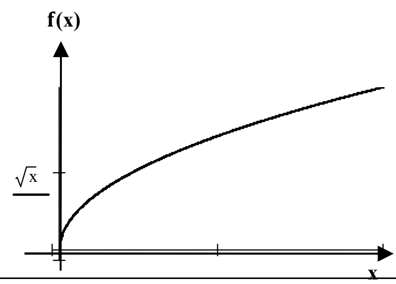
y = f(x) est l'équation cartésienne de f.

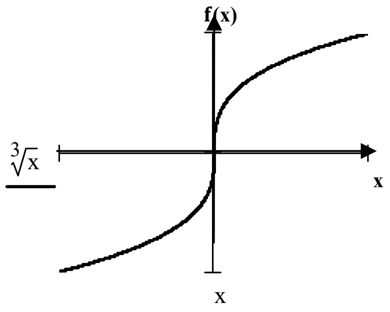
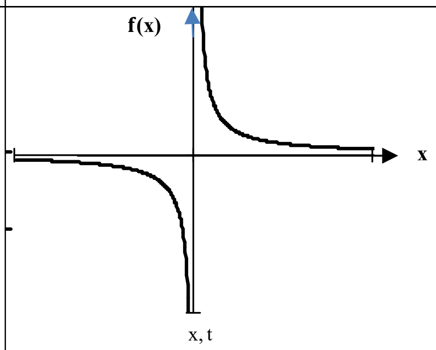
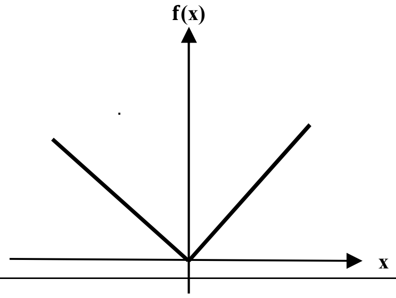
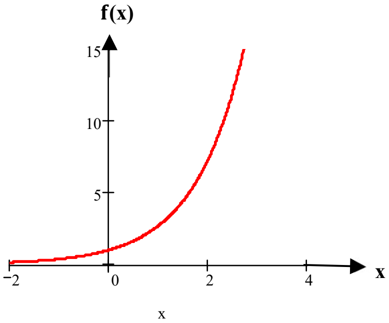
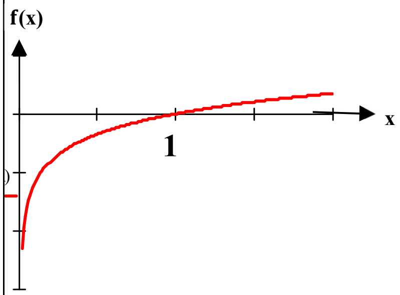
Une fonction peut être obtenue à partir d'une formule (signal déterministe), d'un tableau de valeurs relevé d'expériences physiques (signal numérique), ou bien d'une courbe.

2) Croissance comparée et fonctions usuelles

Pour des grandes valeurs positives de x : $\ln(x) < \sqrt[3]{x} < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < \ldots < x^n < e^x$



Echelon-unité : (Heaviside Φ) $U : \mathbb{R} \longrightarrow \{0\,,1\}$ $x \longmapsto U(x)$ avec $U(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $U(\mathbb{R}) = \{0\,,1\}$ On dit que la fonction U est continue sur $\mathbb{R}$, sauf en 0. $\lim_{x\to 0^-} U(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^+} U(x) = 1$
Triangle : (notée aussi tri) $\Delta : \mathbb{R} \longrightarrow [0\,;1]$ $x \longmapsto \Delta(x)$ $\Delta(x) = \begin{cases} 1-\lvert x\rvert \text{ si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : [0 ; 1] On dit que la fonction triangle est continue sur $\mathbb{R}$.
Puissance impaire : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n+1}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
Puissance paire : $n \in \mathbb{N}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = x^{2n}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+ = [0\,;+\infty[$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
Racine carrée : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

<u>Racine cubique</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ On dit que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Inverse</u> : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ $x \longmapsto f(x) = 1/x$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$ Ensemble image : $\mathbb{R}^*$ f est continue sur $]0 ;+\infty[$ f est continue sur $]-\infty ; 0[$ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
<u>Valeur absolue</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $x \longmapsto f(x) = \lvert x \rvert$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $\mathbb{R}_+$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Exponentielle</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0 ;+\infty[$ $x \longmapsto f(x) = e^x$ $e^0 = 1$ $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $(e^a)^n = e^{a.n}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$		Ensemble de définition : $\mathbb{R}$ Ensemble image : $]0 ;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$ f est continue sur $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
<u>Logarithme népérien</u> : $f :]0 ;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = \ln(x)$ $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$ $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(a^n) = n.\ln(a)$	 $\ln(e^a) = a \ \forall a \in \mathbb{R}$ $e^{\ln(a)} = a \ \forall a > 0$	Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+^*$ Ensemble image : $\mathbb{R}$ f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

II. Ensemble de définition et ensemble d'étude d'une fonction

1) Ensemble de définition

Soit f, une fonction. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des nombres réels x, pour lesquels f(x) existe.

Rappel des opérations impossibles division par zéro, racine carrée d'un nombre négatif, logarithme d'un nombre négatif ou nul, autrement dit :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} & \quad [\,0\,;+\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R} & \quad]\,0\,;+\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/x & \quad x \longmapsto \sqrt{x} & \quad x \longmapsto \ln(x) \end{array}$$

Exemples

- ✓ Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$, déterminer l'ensemble de définition de f

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Soit $g(x) = \exp\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)$, déterminer l'ensemble de définition de g

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Soit $h(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)$, déterminer l'ensemble de définition de h

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Notes

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

- ✓ Soit $k(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x+3}}$, déterminer l'ensemble de définition de k

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

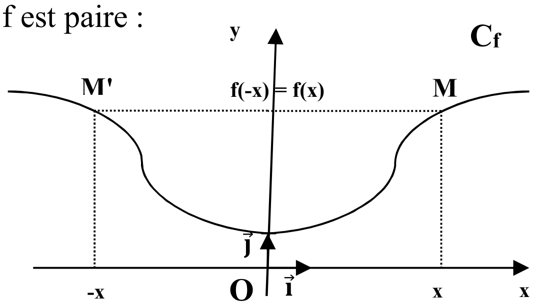
…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

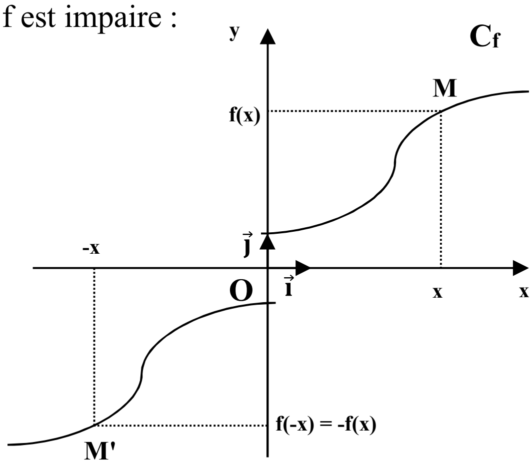
2) Parité

- ✓ **Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite paire lorsque : $\forall x \in D \; f(-x) = f(x)$. Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On étudie alors f sur D$\cap \mathbb{R}_+$**
- ✓ **Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ centré en 0, est dite impaire lorsque : $\forall x \in D \; f(-x) = -f(x)$. Sa représentation graphique est alors symétrique par rapport à l'origine du repère. On étudie alors f sur D$\cap \mathbb{R}_+$**

f est paire :



f est impaire :



Exemples

- ✓ La fonction cosinus $x \mapsto x^2$ sont paires sur $\mathbb{R}$, les fonctions sinus et $x \mapsto x^3$ sont impaires sur $\mathbb{R}$. La fonction tangente est impaire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- ✓ Soit f, la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, étudier la parité de f.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- ✓ Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \sin(x) - \sin(3x)$, étudier la parité de g.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

- ✓ On appelle sinus hyperbolique, la fonction définie par : $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ étudier la parité de sh.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Opérations

- ✓ **Si f et g sont paires sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est paire sur D**
- ✓ **Si f et g sont impaires sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est paire sur D**
- ✓ **Si f est impaire et g est paire sur D, alors $f \times g$ (et f/g $g \neq 0$) est impaire sur D**

Exemple

Soit f, la fonction, définie par : $f(x) = \frac{x^3 . \sin^2(x)}{\cos(x)}$ sur D = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ Etudier la parité de f.

……………………………………………………………………………………………...

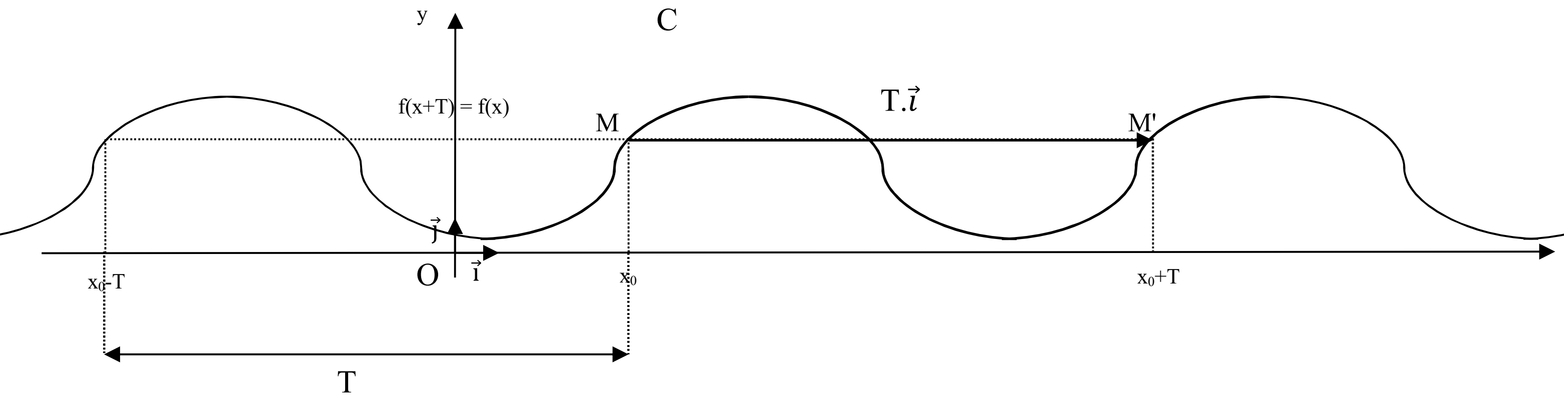
……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

3) Périodicité

Une fonction f, définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, est dite périodique lorsqu'il existe un nombre réel positif, T, le plus petit possible tel que :
$\forall x \in D \;\; f(x+T) = f(x)$. On dit aussi que f est T-périodique.
Soit f_0, la fonction définie par : $f_0(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \epsilon [x_0, x_0+T[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. f_0 est appelée le motif de la fonction f.
La représentation graphique de f est obtenue en appliquant sur la courbe représentant f_0, les translations de vecteur $kT.\vec{i}$ où k est un entier relatif.
On étudie alors la fonction f sur l'intervalle $[x_0, x_0+T[$.



Remarque On peut alors écrire : (voir TP)
$f(t) = ... + f_0(t+2T) + f_0(t+T) + f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \cdots = \sum_{-\infty}^{\infty} f_0(t-kT)$

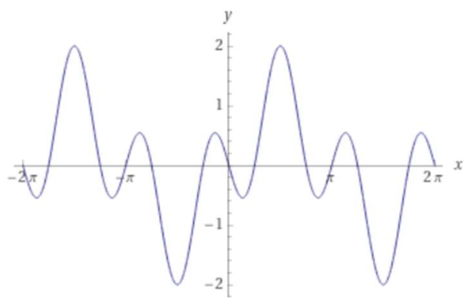
Exemples

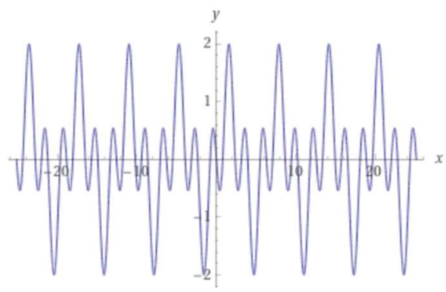
- ✓ Les fonctions $t \mapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$ sont $\frac{2\pi}{\omega}$ – périodiques. La fonction $t \mapsto \tan(\omega t + \varphi)$ est $\frac{\pi}{\omega}$ – périodique sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$
- ✓ Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \sin(x) - \sin(3x)$, étudier la périodicité de g.

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...





………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

Notes

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

III. Dérivabilité

1) Définitions et opérations

Soit f, une fonction définie en a, on dit que f est dérivable en a lorsque : la limite suivante $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle nombre dérivé de f en a.

Soit f, une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable sur I, lorsque f est dérivable en tout point a de I. On appelle alors fonction dérivée de f et on note f ', la fonction qui à tout élément a de I, associe son nombre dérivé $f'(a)$.

Si f et g sont dérivables sur I, alors : αf, f+g, $f \times g$ et f/g (avec $g \neq 0$) sont dérivables sur I. (α est un nombre réel) et $(\alpha f)' = \alpha f'$, $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur f(I), alors $g \circ f$ est dérivable sur I et : $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$

Exemples

- ✓ Soit f, la fonction définie par : $f(x) = x^2$.

Dérivabilité de f en 3 : ……………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

Dérivabilité de f en a, réel quelconque : ………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

Notes

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

2) Formulaire U est une fonction dérivable sur I.

$(x^n)' = n.x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}-\{1\}$	$(\mathbf{U^n})' = \mathbf{n.U'.U^{n-1}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$	$(\sqrt{\mathbf{U}})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{2\sqrt{U}}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$	$\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{U}}\right)' = \frac{\mathbf{-U'}}{\mathbf{U^2}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}^*$
$(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\mathbf{e^U})' = \mathbf{U'.e^U}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$	$(\mathbf{ln(U)})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{U}}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}_+^*$
$(\sin(x))' = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\mathbf{sin(U)})' = \mathbf{U'.cos(U)}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$	$(\mathbf{cos(U)})' = \mathbf{-U'.sin(U)}$, $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R}$
$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$	$(\mathbf{tan(U)})' = \frac{\mathbf{U'}}{\mathbf{cos^2(U)}} = \left(\mathbf{1 + tan^2(U)}\right).\mathbf{U'}$ $\mathbf{U(I)} \subseteq \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k\epsilon\mathbb{Z}\right\}$

Exemples

✓ $f(x) = (2x-3).\cos x$

D_f = ……………………………………………………………………………………………

$f'(x)$ =……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

$D_{f'}$ = ……………………………………………………………………………………………

✓ $g(x) = \frac{sinx}{x}$

D_g = ……………………………………………………………………………………………

$g'(x)$ =……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

$D_{g'}$ = ……………………………………………………………………………………………

- ✓ $\mathrm{i(t)} = V_{eff}\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$

D_i = ……………………………………………………………………………………………

$i'(\mathrm{t}) =$…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

$D_{i'}$ = ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

- ✓ $\mathrm{h(t)} = (t^2 + 5)^{10}$

D_h = ……………………………………………………………………………………………

$h'(\mathrm{t}) =$…………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………...

$D_{h'}$ = ……………………………………………………………………………………………

- ✓ A l’aide de la définition du nombre dérivé du sinus en 0, calculer : $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t}$

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

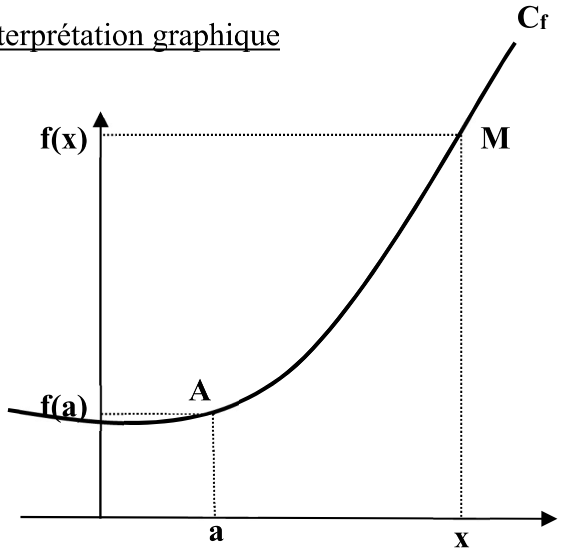
……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………...

Interprétation graphique



$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite (AM)
Lorsque x tend vers a, M tend vers A le long de la courbe, et la droite (AM) se rapproche de la droite T_a, qui est la tangente à la courbe au point A.

Conclusion :

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ **est la pente de la tangente à la courbe au point A(a,f(a)).**

Conséquence Equation de la tangente T_a

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

$$\boxed{T_a : y = f(a) + (x-a).f'(a)}$$

Remarque Graphiquement, une fonction est dérivable en a si et seulement si sa courbe admet au point A(a ;f(a)) une tangente.

<u>Exemples</u>

- ✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = x^3$

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

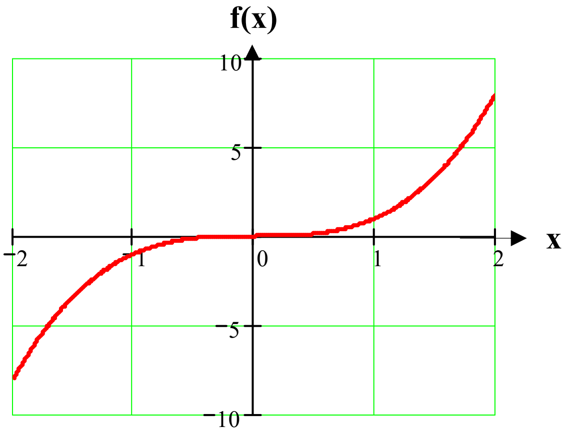
………………………………………………

………………………………………………...

………………………………………………

………………………………………………

………………………………………………

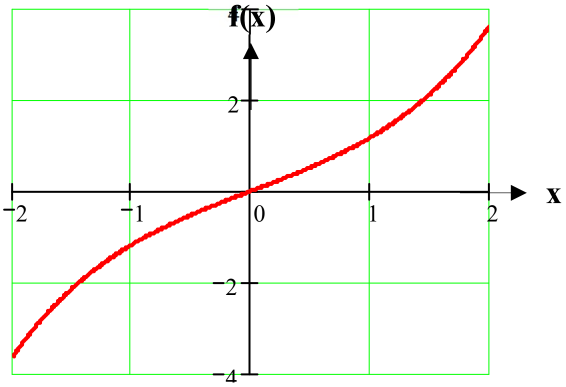


- ✓ Equation de la tangente en O à la courbe représentant la fonction f définie par : $f(x) = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

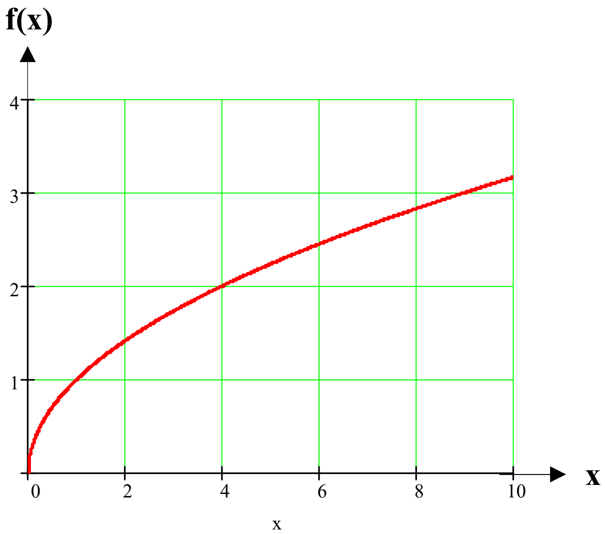
………………………………………………

………………………………………………...

………………………………………………



- ✓ <u>La fonction racine carrée</u> n'est pas dérivable en 0.



$\lim_{x \to 0^+} f'(x) =$…………………………

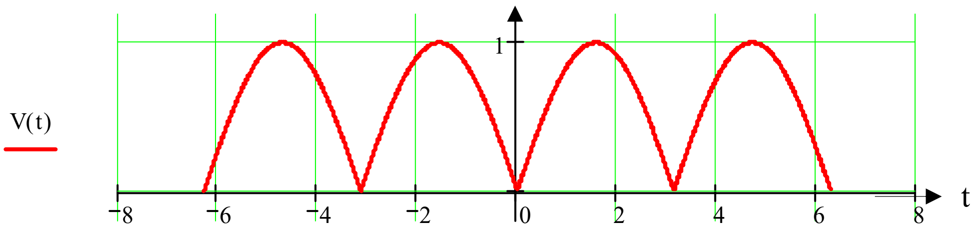
En O, la tangente à la courbe est donc verticale tournée vers les ordonnées positives.

✓ Redressement double alternance : $V(t) = |\sin(t)|$.

Dérivabilité de V en 0 : ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...



……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

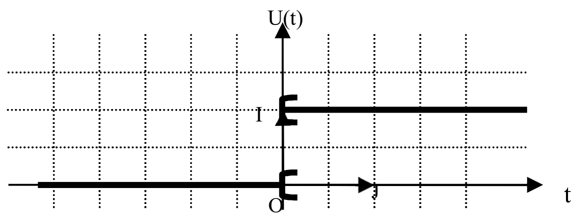
……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

✓ U, la fonction échelon-unité définie et représentée ci-dessous est-elle dérivable sur son ensemble de définition ?

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}.$$



……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………….......

3) Sens de variation

Soit f, une fonction dérivable sur un intervalle I :
Si $f' \geq 0$, f est croissante sur I
Si $f' \leq 0$, f est décroissante sur I

4) Extremum d'une fonction

<u>Définitions</u> :
- Une fonction f admet un maximum en x_0 sur un intervalle I où elle est définie, si pour tout x de I, on a : $f(x) \leq f(x_0)$
- Une fonction f admet un minimum en a sur un intervalle I où elle est définie, si pour tout x de I, on a : $f(x) \geq f(x_0)$
<u>Théorème</u> : Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I contenant x_0 et si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors la fonction f présente un extremum en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	−	
f		↗	M	↘	

Maximum

x	a		x_0		b
$f'(x)$		−	0	+	
f		↘	m	↗	

Minimum

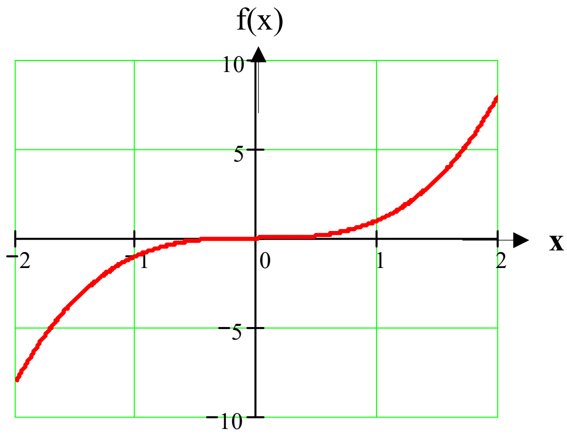
<u>Remarque</u> Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe, et que f'' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors x_0 est un **point d'inflexion**. Un point d'inflexion est un point où la tangente traverse la courbe.

Exemple : $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$f'(0) = 0.$

$f''(x)=6x\geq 0 \quad \forall x\geq 0$
$f''(x) = 6x \leq 0 \quad \forall x \leq 0$
$f''(0) = 0$

O est donc un point d'inflexion, comme on peut le voir sur la représentation ci-contre.



5) Théorème de monotonie

<u>Théorème de monotonie</u> Si f est continue* et strictement monotone sur [a,b] et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation f(x) = 0 possède une seule et unique solution $\propto \in [a, b]$

6) Dérivées successives – Fonction de classe C^n

Définitions Si f est continue sur l'intervalle I, on note : $f \in C^0(I)$
Si f est dérivable sur l'intervalle I, et si $f' \in C^0(I)$, alors on note : $f \in C^1(I)$

Si f' est dérivable sur I, alors on note $f'' = (f')'$ que l'on appelle dérivée seconde de f. Si de plus $f'' \in C^0(I)$, alors on note $f \in C^2(I)$

Plus généralement on définit la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f, notée $f^{(n)}$. Lorsque $f^{(n)} \in C^0(I)$, on note $f \in C^n(I)$.

Exemple

$$i(t) = \cos(\omega t + \varphi)$$

$i'(t) =$……………………………………………………………………………………………

$i''(t) =$…………………………………………………………………………………………...

$i''(t) + \omega^2 i(t) =$………………………………………………………………………..

On dit que i est une solution de l'équation différentielle : $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$.

IV. Limites et branches infinies (Calcul de limites voir partie B)

Voir page ci-après.

V. Plan d'étude d'une fonction

1) Recherche de l'ensemble de définition
2) Recherche de l'ensemble d'étude (parité et de périodicité)
3) Etude du sens de variation et recherche d'extrema
4) Etude de branches infinies (calcul de limites voir partie C)
5) Tracé de la courbe représentative

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

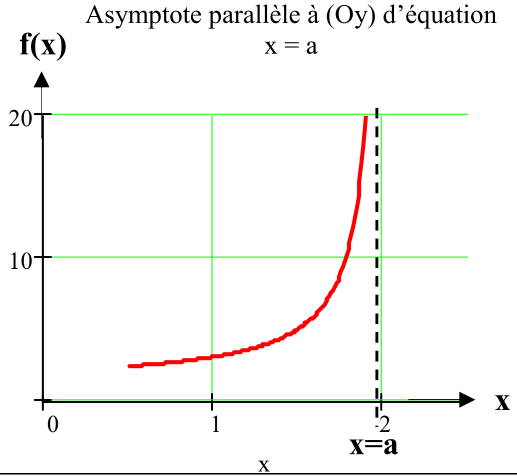
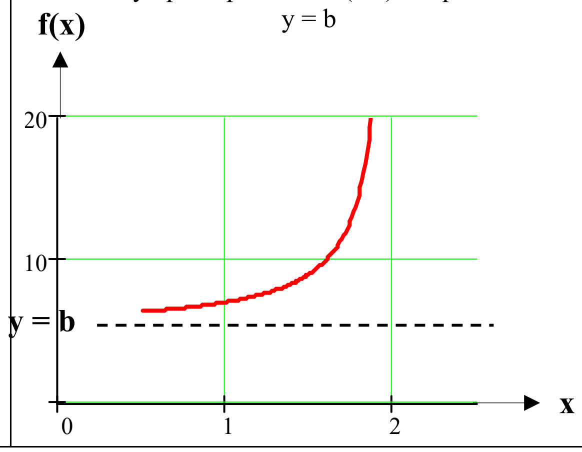
……………………………………………………………………………………….............

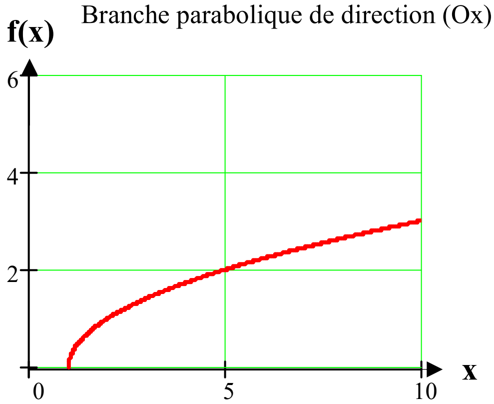
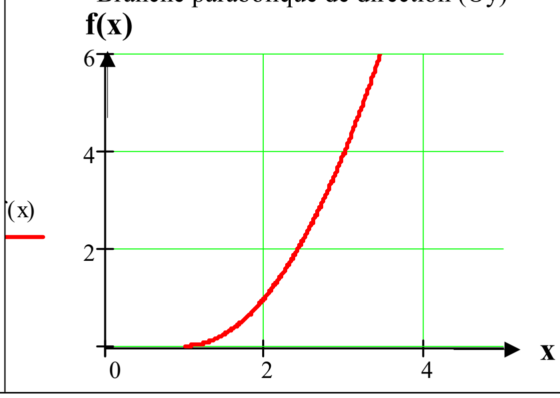
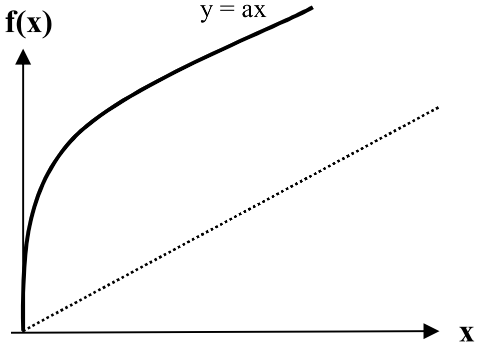
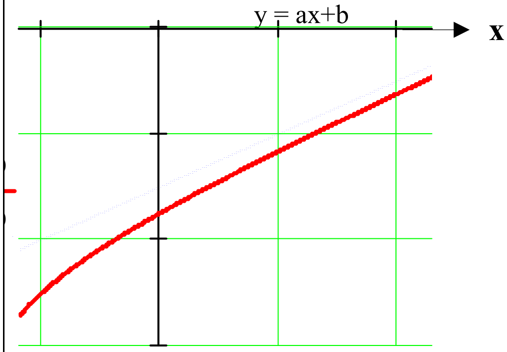
……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………….............

<u>Etude de branches infinies : asymptotes et direction asymptotique.</u>

1^{er} Cas : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$	**$2^{ième}$ Cas : $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = b$**
Asymptote parallèle à (Oy) d'équation x = a 	Asymptote parallèle à (Ox) d'équation y = b 

$3^{ième}$ Cas : $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \pm\infty$, pour déterminer la nature de la branche infinie, on calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$:	
Si $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Si $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp\infty$
Branche parabolique de direction (Ox) 	Branche parabolique de direction (Oy) 
Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$	
Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty$	Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$
Branche parabolique de direction la droite d'équation y = ax 	Asymptote oblique d'équation y = ax+b 

Notes

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

……

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

Partie B : Calcul de limites

Formes indéterminées FI **Soit x_0, un nombre réel ou $\pm\infty$.**

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$	L	L	$\pm\infty$	∞	∞	$\pm\infty$	0	0	L
et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) =$	L' $\neq 0$	$\pm\infty$	L' $\neq 0$	∞	$-\infty$	0	$\pm\infty$	0	0
alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) =$	L+L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	L
et $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x) =$	LL'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞	$-\infty$	FI	FI	0	0
et $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$\pm\infty$	FI	FI	$\pm\infty$	0	FI	$\pm\infty$

Remarque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \exp\big(g(x).\ln(f(x))\big)$ cette écriture permet de « lever » les formes indéterminées suivantes : $"L^\infty", "0^0"$ et $"\infty^0"$

Voici quelques techniques permettant de « lever » une forme indéterminée :

Technique 1 : Croissance comparée

Définition **Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est négligeable devant la fonction g en x_0 lorsque : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note alors : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$**

Théorèmes **Soient : $0 < \alpha < \beta$**

$$\ln(x) \underset{\infty}{<<} x^\alpha \underset{\infty}{<<} x^\beta \underset{\infty}{<<} e^x$$

Exemples : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = x.e^x - x^2$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(4x)}{x}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

<u>Technique 2</u> : Expression conjuguée

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

<u>Technique 3</u> : Théorèmes de comparaison

Soient f, g et h trois fonctions définies sur [a,b[où b est un réel ou $\pm\infty$

1) Si $\forall x \in [a,b[$ $f(x)\le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x)=-\infty$
2) Si $\forall x \in [a,b[$ $f(x)\ge g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=\infty$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$
3) Si $\forall x \in [a,b[$ $|f(x)|\le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x)=0$
4) Si $\forall x \in [a,b[$ $h(x)\le f(x)\le g(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} h(x)=\lim\limits_{x\to b} g(x)=L$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x)=L$ (théorème des gendarmes)

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Notes

Technique 4 : Equivalence

Définition Soit x_0 un réel ou $\pm\infty$. On dit que la fonction f est équivalente à la fonction g en x_0 lorsque : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. On note alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$

Exemples : Montrer que les fonctions f et g suivantes sont équivalentes en ∞ :

$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $g(x) = \frac{e^x}{2}$:

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Chercher un équivalent de f en ∞ où $f(x) = 7x^3 - 3x^2 + 2$

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

Tout polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.
Tout polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

Si f est dérivable en x_0, alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0)$

Compléter :

$\sin(x) \underset{0}{\sim}$ ………………………………………………………………………………

$e^x \underset{0}{\sim}$ ………………………………………………………………………………

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim}$ ………………………………………………………………………………

$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim}$ ………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

$(1+x)^{\alpha} \underset{0}{\sim}$ ……………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………...

$\tan(x) \underset{0}{\sim}$ …………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

Si f est 2 fois dérivable en x_0, alors : $\mathbf{f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}.f''(x_0)}$

$\cos(x) \underset{0}{\sim}$ …………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

Si f est n fois dérivable en x_0, alors :

$$\mathbf{f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + (x - x_0).f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}.f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}.f^{(3)}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}.f^{(n)}(x_0)}$$

<u>Opérations</u>

- Soient f_1, g_1, f_2, g_2 quatre fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

$$\text{Si } \begin{cases} f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1 \\ \text{et} \\ f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f_1.f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1.g_2 \\ \text{et} \\ \dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2} \end{cases}$$

(pour le quotient, f_2 et g_2 ne s'annule pas pour x voisin de x_0 sauf peut-être en x_0)

- f, g, h sont trois fonctions,

$$\textbf{Si } f(X) \underset{X_0}{\sim} g(X) \textbf{ et } \lim_{x \to x_0} h(x) = X_0 \textbf{, alors } f(h(x)) \underset{x_0}{\sim} g(h(x))$$

<u>Exemples</u> :

Compléter **:** $f(x) = \dfrac{-x^7 + 3x^2}{x(x-1)^3} \underset{\infty}{\sim}$ ………………………… ………………………………

……………………………………………………………………………………………...

$e^{\sqrt{x}} \underset{0}{\sim}$ ……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{\infty}{\sim}$ …………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

<u>Théorème</u> Soient f, g deux fonctions et x_0 un réel ou $\pm\infty$.

Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

<u>Exemples</u> : Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{(1-x)^7.(x+1)}{(x^3+2x^2-1).(3x^2-1)^2}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\tan(x)}$

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………...

Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ où $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

<u>Technique 5</u> : Théorème de l'Hospital

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur]a,x_0[, dont la limite en x_0 est nulle ou infinie, si g'(x) ne s'annule pas sur]a,x_0[, et si la limite : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, alors : $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Exemples</u> :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x^2 + 3x} =$ ……………………………………………………………………………......

………………………………………………………………………………………………...

(autre méthode : ……………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………)

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)} =$ ……………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………

(autre méthode : ……………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2}=$ ……………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

(autre méthode : ……………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………)

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………………...

Partie C : Fonctions réciproques de exp et tan

Introduction

Une <u>fonction</u> f est définie sur D, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, si à tout x de D on peut associer un <u>unique</u> nombre noté f(x), et appelé image de x par f.

On écrit $f : D \longrightarrow f(D)$

$\qquad\qquad\quad x \longmapsto y = f(x)$

D est appelé l'ensemble de définition de f, et f(D) l'ensemble image de D par f.

Peut-on déduire de f une fonction g, définie de la façon suivante ?

$$\begin{aligned} g : f(D) &\longrightarrow D \\ y &\longmapsto x \,/\, y = f(x) \end{aligned}$$

La réponse est oui, à condition que la fonction f soit bijective sur D.

I. Fonction bijective

1) Définition

On appelle fonction <u>bijective sur D</u>, toute fonction $f : D \longrightarrow f(D)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \longmapsto y = f(x)$

vérifiant : $\forall\, y \in f(D)\ \exists !\ x \in D \,/\, y = f(x)$ **, c'est-à-dire :**

« Pour tout y, élément de f(D), il existe un unique x, élément de D tel que y=f(x) »

<u>Exemples</u>

- ✓ La fonction carré est-elle bijective sur $\mathbb{R}$? sur $[0 ; +\infty [$?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

- ✓ Déterminer un intervalle sur lequel la fonction tangente est bijective.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2) Théorème

Toute fonction continue et strictement monotone sur D est bijective sur D.

Exemple La fonction exponentielle est-elle bijective sur son ensemble de définition ? Pourquoi ?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

II. Fonction réciproque

1) Définition

Définition/Théorème **Soit une fonction bijective** $f : D \longrightarrow f(D)$, $x \longmapsto y = f(x)$

il existe alors une fonction notée f^{-1} **et appelée « fonction réciproque de f »,**
telle que : $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$, $y \longmapsto x = f^{-1}(y)$

Remarques : $\forall\ x \in D,\ (f^{-1} \circ f)(x) = x$ **et** $\forall\ y \in f(D),\ (f \circ f^{-1})(y) = y$
Les courbes représentant f et f^{-1} **sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite** $y = x$**.**

<u>Exemple</u> Déterminer et représenter graphiquement les fonctions réciproque des fonctions exponentielle et tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, ainsi que leur dérivée respective.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

En résumé

On appelle fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction définie par :

$$\tan_{/\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \tan(x)$$

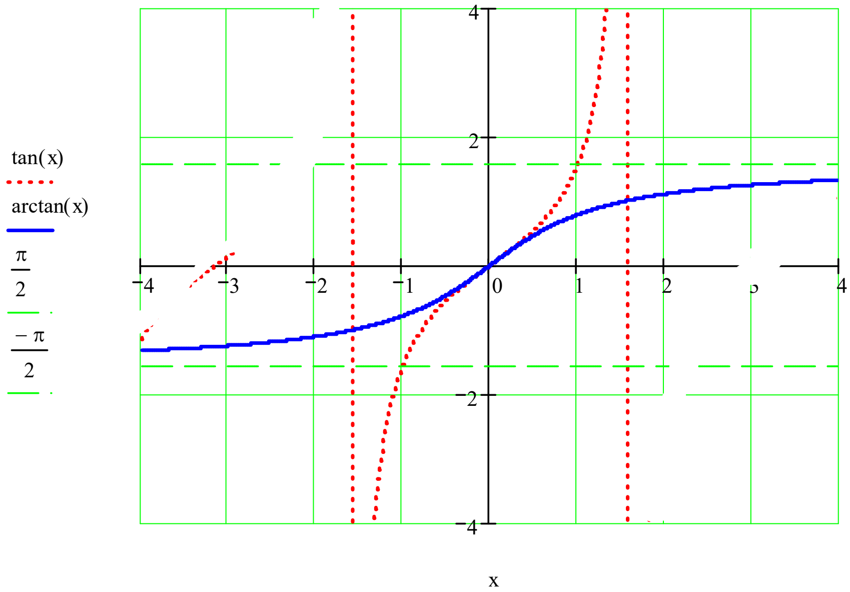
Cette fonction est strictement croissante et continue, elle est donc bijective et admet alors une fonction réciproque notée Arctan et appelée Arctangente, définie par :

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$
$$y \longmapsto x = \text{Arctan}(y) \text{ tel que } y = \tan(x)$$

Arctan est une fonction continue et strictement croissante.

$$\tan(\text{Arctan}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\frac{d}{dx}(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

Exercices

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, calculer sa fonction dérivée et son ensemble de définition :

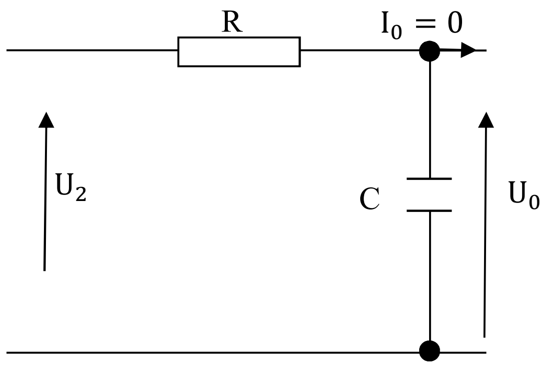
$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$; $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$; $g(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$ avec $t \neq 1$;

$h(t) = \sqrt{t^2+1}$; $l(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$; $X(\omega) = \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$; $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$;

$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$; $f_0(C) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$; $W(C) = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$; $W(Q) = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$;

$V(x) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)$

Exercice 2 On considère le filtre passe-bas suivant :



Sa fonction de transfert a pour module : $T = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\quad)^2}} = \left|\dfrac{U_1}{U_2}\right|$

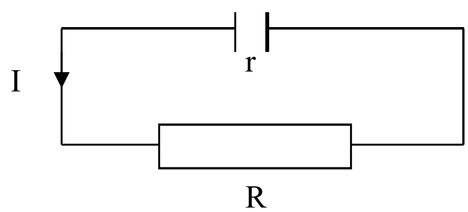
1) Exprimer le module T en fonction de $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$.
2) Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction $\Omega \longmapsto T(\Omega)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exercice 3 L'impédance d'un dipôle R, L, C sous une tension alternative de fréquence f est :

$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ avec : $\omega = 2\pi f$.

1) Déterminer le signe de la dérivée de la fonction $\omega \longmapsto Z(\omega)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) Etudier la fonction $\omega \longmapsto I(\omega) = \frac{U}{Z(\omega)}$ où U est l'amplitude constante de la tension, puis la tracer.

Exercice 4 Soit un générateur de force électromotrice E, de résistance interne r et le circuit ci-dessous. Déterminer la valeur de la résistance R pour que la puissance dissipée y soit maximum (on trouve $P(R) = E^2.\frac{R}{(R+r)^2}$)



Exercice 5 Calculer la limite des fonctions suivantes au « point » a donné.

1) $f(x)=\dfrac{(x^4-1)(x^2+3)}{2x(x^3-2)(x^2+2)}$ a=∞

2) $g(x)=\dfrac{(x^7-2x)(x-4)}{(x^6-2x)(x^3-x)}$ a=∞

3) $h(x)=\dfrac{x^6-3x^4+1}{(x+1)(x^4+3)}$ a=∞

4) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^3-1}$ a=1

5) $f(x)=\dfrac{x^3+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-2}$ a=∞

6) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ a=3

Exercice 6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto f(x)=\mathrm{Arctan}x+\mathrm{Arctan}\frac{1}{x}$
Calculer $f'(x)$ puis en déduire l'expression de f(x) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$

Notes

Partie E : Exercices d'entraînement pour les poursuites d'études longues

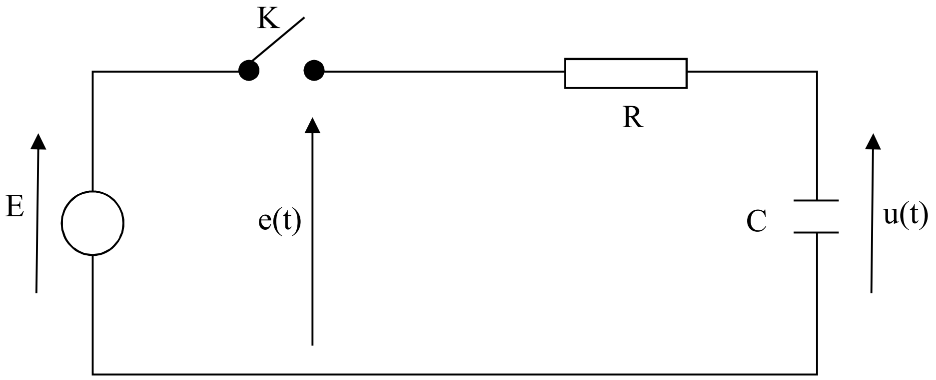
Exercice 1 Avec des logarithmes.

1) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$. Etudier le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}^{+*}$
2) Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f(x) = (x + 1).\ln x$.

Exercice 2 Dans le circuit ci-dessous on suppose que le condensateur est initialement chargé : On note U_0 la tension à ses bornes. A l'instant t = 0 on ferme l'interrupteur K. La fonction $t \mapsto e(t)$ est définie par : $e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

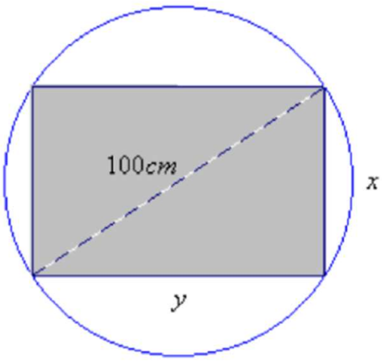
On démontre que la fonction $t \mapsto u(t)$ est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$u(t) = (U_0 - E)e^{-\frac{t}{RC}} + E$.



1) Etudier sur $[0; +\infty[$ les variations de la fonction $t \mapsto u(t)$ et calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)$, on discutera suivant les valeurs relatives de U_0 et E.
2) Déterminer la tangente à la courbe représentative de u à l'origine et donner l'allure de cette dernière.

Exercice 3 Dans une plaque circulaire de diamètre 100 cm, on veut découper une plaque rectangulaire de surface maximale. Quelles sont les dimensions de cette plaque rectangulaire ?



Exercice 4 L'étude d'un circuit électrique conduit à étudier sur $[0; +\infty[$ la fonction $i : t \mapsto i(t) = I(e^{-\frac{t}{2}} + 2te^{-t})$ avec I > 0. On se propose de représenter graphiquement la fonction i.

1) Soit f, la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(t) = 1 - t - \frac{1}{4}e^{\frac{t}{2}}$. Etudier les variations de f ; en déduire que l'équation f(t) = 0 admet sur $[0; +\infty[$ une solution unique t_1 et que t_1 est élément de $[0.65 ; 0.66]$.
2) Déduire de 1) le signe de f(t).
3) Etudier les variations de i . Déterminer $\lim_{t\to+\infty} i(t)$. Tracer la courbe représentant i.

Exercice 5 Calculer à l'aide du nombre dérivé la limite suivante : $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x - \sqrt{2}}{2\cos x - \sqrt{2}}$

Exercice 6 Calculer : $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - (1+\frac{x}{2})}{x^2}$. En déduire que si x tend vers 0, alors $\sqrt{1+x}$ est équivalent à $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$.

Exercice 7 Calculer les limites :

$\lim_{x\to+\infty} (\text{sh}x)^{1/x}$ (on utilisera le logarithme et un équivalent.)

Exercice 8 Soit la fonction : $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

1) Montrer que f admet deux domaines de monotonie.
2) Exprimer dans chacun de ces domaines la fonction réciproque.
3) Tracer dans chacun des cas les courbes de f et f^{-1} sur le même graphique.

Exercice 9 On donne les deux fonctions : $f(x) = \text{Arctan}\, x$ et $g(x) = \text{Arctan}\frac{2x}{1-x^2}$

1) Ensembles de définition et dérivée de g(x)
2) Etablir une relation entre f '(x) et g '(x) et déduire la relation entre g(x) et f(x).
3) Tracer les courbes de f(x) et g(x) sur le même graphique.

Exercice 10 Etude et représentation des fonctions : $x \mapsto y = f_1(x) = \sin(\text{Arcsin}x)$ et $x \mapsto y = f_2(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$

------------------Extraits d'énoncés de préparation aux concours---------------------------------------

Exercice extrait de l'épreuve de mathématiques au concours ENSEA 2005

1) Soit g, la fonction définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$. Etudier g (ensemble de définition, tableau de variation et limites), puis en déduire le signe de g sur son ensemble de définition.
2) Soit f, la fonction définie par : $f(x) = e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$. Etudier f.

Exercice extrait de l'épreuve de mathématiques au concours ENSEA 2003

Etudier la fonction f, définie par : $f(x) = x - \ln(\text{ch}x)$