II. Calcul intégral

Théorème / définition : Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On appelle intégrale de la fonction f sur l'intervalle [a,b], le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ et tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Interprétation graphique : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.

$J = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = \left[\ln|x+1|\right]_0^{e-1} = \ln|e-1+1| - \ln|0+1| = \ln(e) - \ln(1) = 1.$

$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + cte$ ici $u = x+1 \Rightarrow u' = 1$

Notes

III. Propriétés

1) Linéarité

Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b \left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Exemples et applications

✓ $I = \int_{-1}^{1} (3x^7 + 2x^6 - 1)dx = 3\int_{-1}^{1} x^7\,dx + 2\int_{-1}^{1} x^6\,dx - \int_{-1}^{1} 1.dx$

$= 3\left[\frac{x^8}{8}\right]_{-1}^{1} + 2\left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} - [x]_{-1}^{1}$

$= 3\underbrace{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)}_{0} + 2\left(\frac{1}{7} - \frac{-1}{7}\right) - (1-(-1)) = \frac{4}{7} - 2 = -\frac{10}{7}$

on écrire :

$I = \left[3\frac{x^8}{8} + 2\frac{x^7}{7} - x\right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{7} - 1 - \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{7} + 1\right)\right) = \frac{-10}{7}$

$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx =$ ASTUCE : $x = x+1-1$ donc :

$J = \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= [x - \ln|x+1|]_0^1 = 1 - \ln 2 - 0$

$J = 1 - \ln 2$

$$L(x) = \int (5.\cos(2x) - e^{5x} + 9)dx = 5.\int \cos(2x)\,dx - \int e^{5x}dx + 9.\int 1.dx$$

$$= \frac{5}{2}\int 2\cos(2x)\,dx - \frac{1}{5}\int 5e^{5x}dx + 9x + cte$$

$$L(x) = \frac{5}{2}\sin(2x) - \frac{1}{5}e^{5x} + 9x + cte$$