**Exercice 1 : Calcul intégral (2 pts)** Un circuit comprend un générateur de force contre électromotrice E (en Volt), une bobine de résistance R (en Ohm) et d'inductance L (en Henry). L'intensité du courant i(t) (en Ampères) à l'instant t (en secondes) est donnée par la relation : $i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$. Calculer la quantité d'électricité Q, en Coulombs, mise en jeu entre les temps 0 et 0,1 secondes. On rappelle que $Q = \int_0^{0,1} i(t)dt$

$$Q = \int_0^{0,1} \frac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)dt = \frac{E}{R}\int_0^{0,1}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)dt$$

$$= \frac{E}{R}\left\{\int_0^{0,1} 1.dt - \frac{-L}{R}\int_0^{0,1} -\frac{R}{L}e^{-Rt/L}dt\right\}$$ On sait que : $\int u'e^u dt = e^u + cte$

Ici $u = -\frac{Rt}{L} \Rightarrow u' = -\frac{R}{L}$

$$= \frac{E}{R}\left\{[t]_0^{0,1} + \frac{L}{R}\left[e^{-Rt/L}\right]_0^{0,1}\right\}$$

$$Q = \frac{E}{R}\left\{0,1 + \frac{L}{R}\left(e^{-\frac{R.0,1}{L}} - e^0\right)\right\} = \frac{E}{R}\left[0,1 + \frac{L}{R}\left(e^{-0,1R/L} - 1\right)\right]$$

**Exercice 2 : Calcul Intégral – Simplifier les résultats obtenus – pas de valeurs approchées. (6 pts)**
**Attention à ne pas oublier les « dx » ou les « + cte » lorsque cela est nécessaire.**

**1)** Déterminer et simplifier si possible les primitives suivantes :

$\forall x \neq 0 \quad I(x) = \int\left(8x - \frac{4}{x} + 3x^2 - e^x\right)dx = 8\int x\,dx - 4\int \frac{1}{x}dx + 3\int x^2 dx - \int e^x dx$

$$I(x) = 8\frac{x^2}{2} - 4\ln|x| + 3\frac{x^3}{3} - e^x + cte = 4x^2 - 4\ln|x| + x^3 - e^x + cte$$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad J(t) = \int 3.(4t-5)^9 dt = \frac{3}{4}\int 4(4t-5)^9 dt = \frac{3}{4}\frac{(4t-5)^{10}}{10} + cte$

$\int u'u^\alpha dt = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ Ici $u = 4t-5 \Rightarrow u' = 4$

$$J(t) = \frac{3}{40}(4t-5)^{10} + cte$$

$\forall r \in \mathbb{R} \quad K(r) = \int \frac{r^5}{5r^6+3}dr = \frac{1}{30}\int \frac{30r^5}{5r^6+3}dr$

$\int \frac{u'}{u}dt = \ln|u| + cte$ Ici $u = 5r^6+3 \Rightarrow u' = 30r^5$

$$K(r) = \frac{1}{30}\ln|5r^6+3| + cte$$

2) Calculer l'intégrale suivante :

$$M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{4.\cos(3\theta)d\theta}_{\text{paire}} = 2 \times \int_0^{\pi/2} 4.\cos(3\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} 3 \times \cos(3\theta)\,d\theta$$

$$\int U'.\cos U\,d\theta = \sin U + cte \quad \text{Ici } U = 3\theta \Rightarrow U' = 3$$

$$M = \frac{8}{3}\left[\sin(3\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}\left(\sin\frac{3\pi}{2} - \sin 0\right) = -\frac{8}{3}$$

**Exercice 3 : Valeurs moyenne et efficace (3,5 pts)**

Soit f, le signal 3-périodique, défini par :

$$f(t) = \begin{cases} 5 \; si \; 0 \le t < 1 \\ -t + 2 \; si \; 1 \le t \le 3 \end{cases}$$

1) Calculer la valeur moyenne de f. On pourra, selon la méthode utilisée, tracer ce signal.

**Rappel : La valeur moyenne d'un signal f, T-périodique est égale à : $V_{moy} = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(t)dt$**

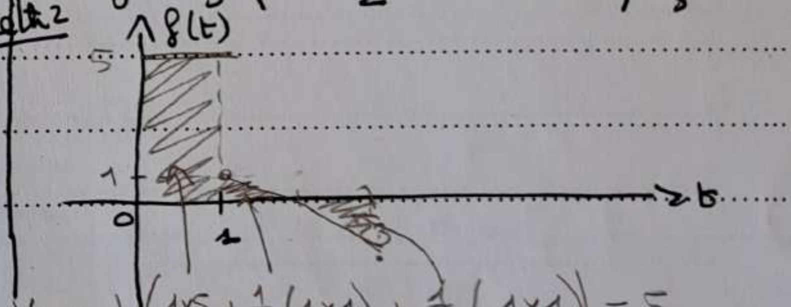
Rép 1 $V_{moy} = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt$

$$= \frac{1}{3}\left(\int_0^1 5dt + \int_1^3 (-t+2)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[5t\right]_0^1 + \left[-\frac{t^2}{2} + 2t\right]_1^3\right)$$

$$V_{moy} = \frac{1}{3}\left(5 + \frac{-9}{2} + 6 + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$$

Rép 2




$$V_{moy} = \frac{1}{3}\left(1 \times 5 + \frac{1}{2}(1 \times 1) + \frac{1}{2}(-1 \times 1)\right) = \frac{5}{3}$$

2) Calculer la valeur efficace de f.

**Rappel : La valeur efficace d'un signal f, T-périodique est égale à : $V_{eff}^2 = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T f^2(t)dt$**

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{3}\int_0^3 f^2(t)\,dt = \frac{1}{3}\left\{\int_0^1 25\,dt + \int_1^3 (2-t)^2\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\left[25t\right]_0^1 - \left[\frac{(2-t)^3}{3}\right]_1^3\right\} = \frac{1}{3}\left(25 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{3}\left(25 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}(77) = \frac{77}{9} \Rightarrow V_{eff} = \frac{\sqrt{77}}{3}$$

## Exercice 4 Etude de fonction (6 pts)

Soit f, la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\omega^2 - x^2}$ où $\omega$ est une constante réelle strictement positive.

1) Expliquer pourquoi l'ensemble de définition de f est : $D_f = [-\omega ; \omega]$.

f(x) existe si et seulement si $-x^2+\omega^2 \geq 0 \iff (-x+\omega)(x+\omega) \geq 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\omega$ | | $\omega$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+\omega^2$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

donc $D_f = [-\omega ; \omega]$

2) Etudier, en la justifiant, la parité de f :

$f(-x) = \sqrt{-(-x)^2+\omega^2} = \sqrt{-x^2+\omega^2} = f(x)$

f est donc paire

**3) On souhaite étudier f sur l'intervalle** $[0 ; \omega]$

**a)** Déterminer le signe de la dérivée de f sur $[0 ; \omega[$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{-x^2+\omega^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{-x^2+\omega^2}}$ $\forall x \in [0 ; \omega[$

$\sqrt{-x^2+\omega^2} > 0$ et $x \leq 0$ $\forall x \in [0 ; \omega[$

Donc $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in [0 ; \omega[$.

c) ~~b)~~ En déduire le tableau de variation **complet*** de f sur $[\omega ; +\infty[$ :
(*) avec les limites (sans les justifier).

| $x$ | 0 | | $\omega$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | $-$ | ‖ |
| $f$ | $\omega$ | $\searrow$ | 0 |

$f(0) = \sqrt{\omega^2} = |\omega| = \omega$ car $\omega \geq 0$

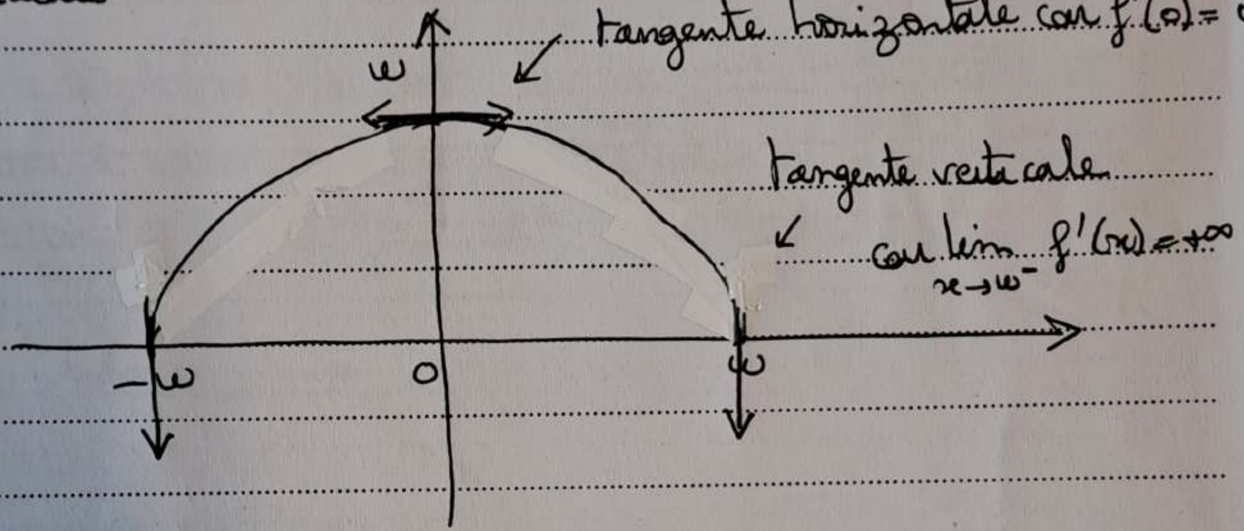
$\lim_{x \to \omega} f(x) = 0$

c) Calculer $\lim_{x \to \omega^-} f'(x)$

$\lim_{x \to \omega^-} f'(x) = \lim_{x \to \omega^-} \dfrac{-x}{\sqrt{-x^2+\omega^2}} = \dfrac{-\omega}{0^+} = -\infty$

$x < \omega$
$\Rightarrow x^2 < \omega^2 \Rightarrow -x^2+\omega^2 > 0$

d) Tracer l'allure de la fonction f sur son ensemble de définition (on précisera en couleur les éventuelles tangentes ~~horizontales~~ verticales et asymptotes) :




**Exercice 5 : Calcul de limites (2,5 pts)**

a) Déterminer un équivalent de $e^X$ en 0 en utilisant l'équation de la tangente.

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x f'(0)$

$e^x \underset{0}{\sim} e^0 + x e^0 \Rightarrow e^x \underset{0}{\sim} 1 + x$

b) En déduire un équivalent en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{(e^{4x}-1).(3x^2+5x^3)}{8x^3}$

$f(x) \underset{0}{\sim} ?$ $\quad e^{4x} \underset{0}{\sim} 1 + 4x$ d'après b)

Ainsi $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{4x \times 3x^2}{8x^3} = \dfrac{3}{2}$

c) Quelle est alors la valeur de la limite de f(x) quand x tend vers 0 ?

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{3}{2}$

**Exercice hors barème pour les poursuites d'études (ne compte pas dans la note finale)**

A l'aide de la règle de l'Hospital, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin x}{x}$$

$* \; L = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = "\frac{0}{0}"$ FI

D'après la règle de l'Hospital : $L = \lim_{x\to 0} \frac{2x.e^{x^2} + \sin x}{2x} = "\frac{0}{0}"$

On applique à nouveau la règle de l'Hospital et on obtient :

$L = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} + \cos x}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

$* \; \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = "\frac{0}{0}"$ FI

D'après la règle de l'Hospital : $L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{1} = \frac{1-1}{1} = 0$