Exercice 1 Limites (5 pts) 5 TB

a) A l'aide de la méthode de l'expression conjuguée, déterminer la limite : $L = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{5x^2}$

$$\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{5x^2} = \frac{1+3x^2-1}{5x^2(\sqrt{1+3x^2}+1)} = \frac{3}{5(\sqrt{1+3x^2}+1)}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{3}{5(\sqrt{1+3x^2}+1)} = \frac{3}{10}$$

b) Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'Hospital

$\lim_{x \to 0} = \sqrt{1+3x^2} - 1 = 0 = \lim_{x \to 0} 5x^2$ donc d'après le théorème de l'Hospital:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{6x}{20x\sqrt{1+3x^2}} = \frac{3}{10}$$

c) Retrouver ce résultat en utilisant la méthode des équivalents (on cherchera d'abord un équivalent de $\sqrt{1+X}$ en 0).

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1+0}}(x-0) + \sqrt{1+0} = 1 + \frac{x}{2}$$

donc $L = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{3x^2}{2} - 1}{5x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{10x^2} = \frac{3}{10}$

Exercice 2 Fonctions (7 pts) 7

Soit X, la fonction définie par : $g(t) = \frac{t}{t^2-\omega^2}$ où ω est une constante strictement positive.

1) Déterminer l'ensemble de définition de g :

$D_g = \mathbb{R} \setminus \{\omega ; \omega\}$ car $t^2-\omega^2 \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{\omega ; -\omega\}$

2) Etudier en le justifiant la parité de la fonction g.

$g(-t) = -\frac{t}{(-t)^2-\omega^2} = -\frac{t}{t^2-\omega^2} = -g(t)$

La fonction g est donc impaire

3) Déterminer la fonction dérivée de g :

$g'(t) = \frac{t^2-\omega^2-2t^2}{(t^2-\omega^2)^2} = \frac{-t^2-\omega^2}{(t^2-\omega^2)^2} = -\frac{(t^2+\omega^2)}{(t^2-\omega^2)^2}$

4) Construire le tableau de variations de g sur l'ensemble des valeurs positives de son ensemble de définition, en justifiant le signe de la dérivée, et la détermination des limites.

x	0		ω		
$g'(t)$		$-$	$\|\|$	$-$	
g	$g(0)$ $\searrow$	$-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	0^+

Signe de $g'(t)$: $(t^2+\omega^2) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^+\setminus\{\omega\}$

$(t^2-\omega^2)^2 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^+\setminus\{\omega\}$

donc $g'(t) < 0 \ \forall t \in \mathbb{R}^+\setminus\{\omega\}$

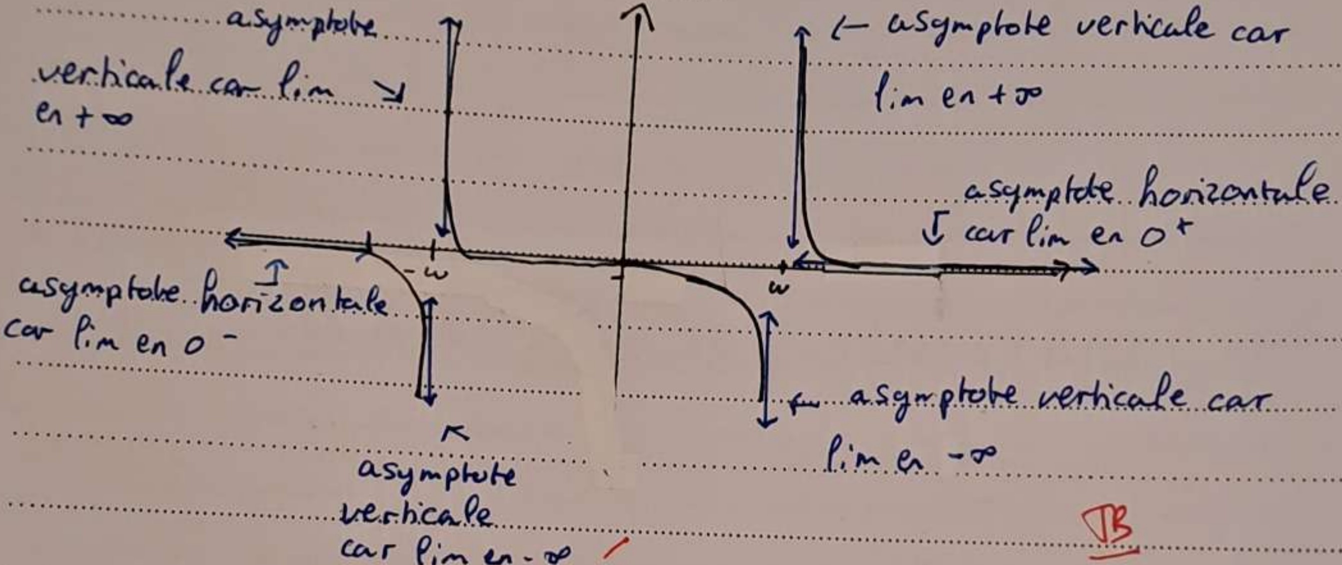
$g(0) = -\frac{0}{\omega^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to\omega^-} g(x) = \frac{\omega}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\omega^+} g(x) = \frac{\omega}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \underset{+\infty}{\sim} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{t}{t^2} = 0^+$ VB

5) Tracer l'allure de la courbe représentant g sur son ensemble de définition, en précisant les éventuelles asymptotes et/ou tangentes horizontales et/ou verticales.



VB

Exercice 3 : Calcul Intégral – Simplifier les expressions – pas de valeurs approchées. (8 pts)

1) Déterminer et simplifier si possible les primitives suivantes :

7

$\forall x \neq 0 \ \ I(x) = \int \left(8x^3 - \frac{5}{x^2} + 2x - 5\right) dx = 8\int x^3 dx - 5\int \frac{1}{x^2} dx + 2\int x\, dx - \int 5\, dx$

$= \frac{8}{4}x^4 + \frac{5}{x} + \frac{2}{2}x^2 - 5x + C = 2x^4 + \frac{5}{x} + x^2 - 5x + C \quad C \in \mathbb{R}$

$K(t) = \int \frac{2t^3+2t}{\sqrt{t^4+2.t^2+1}}\,dt = \sqrt{t^4+2t^2+1} + c$ $\quad c \in \mathbb{R}$

$J(t) = -\int -3.\sin(4t).\cos^7(4t)dt = -\frac{3}{32}\cos^8(4t) + c$ $\quad c \in \mathbb{R}$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$L = \int_{-2}^{-1} \frac{3}{t}dt = \Big[3\ \ln(|t|)\Big]_{-2}^{-1} = 3\ln(1) - 3\ln(2) = 3\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$M = \int_{-\pi}^{\pi} x^3.\cos(7x)dx$ $x \longmapsto x^3$ est une fonction impaire centrée en 0

$x \longmapsto \cos(7x)$ est une fonction paire centrée en 0

donc $x \longmapsto x^3\cos(7x)$ est une fonction impaire centrée en 0 donc $M = 0$.

$N = \int_0^1 t.\sqrt{e^{-t^2}}dt = \int_0^1 t\ e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^1 = -e^{-\frac{1}{2}} + 1$