Test1 – R2.04 - Outils Mathématiques et Logiciels - Sujet 1

Nom :.......................... Prénom : ....Groupe : ....

1) Complexes sous forme polaire : (9pts)
Soit $\underline{Z} = [3; -40°]$ et $\underline{Z'} = [2; 80°]$. Compléter :

$\underline{Z}.\underline{Z'} = [3; -40°] \times [2; 80°] = [3\times 2; -40+80] = [6; 40]$

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \frac{[3; -40°]}{[2; 80°]} = [\frac{3}{2}; -40-80] = [\frac{3}{2}; -120°]$

$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2Re(Z) = 2Re([3; -40°]) = 2\times 3 \cos(-40°) \simeq 4{,}6$

$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2j\, Im(Z) = 2j\, Im([3; -40°]) = 2j\, 3 \sin(-40°) \simeq -3{,}86 j$

$\underline{Z}.\underline{Z}^* = Z^2 = 3^2 = 9$
module

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}^*} = \frac{[3; -40]}{[3; 40]} = [\frac{3}{3}; -40-40] = [1; -80°]$

$Re(\underline{Z'}) = 2 \cos(80°) \simeq 0{,}35$

$Im(\underline{Z'}) = 2 \sin(80°) \simeq 1{,}97$

$\underline{Z}^6 = [3; -40]^6 = [3^6; 6\times(-40)] = [729; -240°]$

2) Formules d'Euler : (6,5 points)

a) Compléter :

$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$e^{3j\theta} - e^{-3j\theta} = 2j \sin(3\theta)$

$-7e^{2j\theta} - 7e^{-2j\theta} = -7(e^{2j\theta} + e^{-2j\theta}) = 7\times 2\cos(2\theta) = -14\cos(2\theta)$

b) En utilisant les formules d'Euler, linéariser $sin^2(5\theta)$

$\sin^2(5\theta) = \left(\dfrac{e^{5j\theta} - e^{-5j\theta}}{2j}\right)^2 = \dfrac{1}{(2j)^2}\left(e^{5j\theta} - e^{-5j\theta}\right)^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = e^{5j\theta}$ et $b = e^{-5j\theta}$; $(2j)^2 = 4j^2 = -4$

$\sin^2(5\theta) = -\dfrac{1}{4}\left((e^{5j\theta})^2 - 2e^{5j\theta}e^{-5j\theta} + (e^{-5j\theta})^2\right)$

$= -\dfrac{1}{4}\left(e^{10j\theta} - 2 + e^{-10j\theta}\right)$

$= -\dfrac{1}{4}\left(2\cos(10\theta) - 2\right) = \dfrac{-2}{-4}\left(1 - \cos(10\theta)\right)$

$\sin^2(5\theta) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos(10\theta)\right)$

3) Polynômes (4,5 points)

Soit P, le polynôme défini par : $P(x) = 2x - 4x^3 + 3 - 7x^{10} + x^2$

Déterminer le degré de P, le monôme de de degré 3, le coefficient de x^5.

$deg(P) = 10$ - le monôme de degré 3 est $-4x^3$ - le coefficient de x^5 est 0 -

A quel ensemble P appartient-t-il ? $P \in \mathbb{R}[X]$

Chercher a, b, c, d tels que : $ax^3 + (a + 2b)x^2 + (c - 2b)x + c + 2d - a = 2x^3 + 7x + 1$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a + 2b = 0 \\ c - 2b = 7 \\ c + 2d - a = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -a/2 = -1 \\ c = 7 + 2b = 7 - 2 = 5 \\ 2d = 1 - c + a = -2 \Longleftrightarrow d = -1 \end{cases}$

Conclusion : $a = 2$; $b = -1$; $c = 5$ et $d = -1$.

Test1 – R2.04 - Outils Mathématiques et Logiciels - Sujet 2

Nom :.......................... **Prénom :** ....**Groupe :** ....

1) Complexes sous forme polaire : (9pts)
Soit $\underline{Z} = [5; 80°]$ et $\underline{Z}' = [3; -20°]$. Compléter :

$\underline{Z}.\underline{Z}' = [5;80°] \times [3;-20°] = [5\times 3 ; 80-20] = [15 ; 60°]$

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'} = \frac{[5;80°]}{[3;-20°]} = [\frac{5}{3} ; 80-(-20)] = [\frac{5}{3} ; 100°]$

$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2Re(Z) = 2\times 5\times \cos 80° \simeq 1,74$

$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2j\, Im(Z) = 2j \times 5 \times \sin 80° \simeq 9,85\, j$

$\underline{Z}.\underline{Z}^* = Z^2 = 25$ ou $Z.Z^* = [5;80] \times [5;-80] = [5\times 5 ; 80-80] = [25;0°]$

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}^*} = \frac{[5;80°]}{[5;-80°]} = [\frac{5}{5} ; 80-(-80)] = [1;160°]$

$Re(\underline{Z}') = 3\cos(-20°) \simeq 2,82$

$Im(\underline{Z}') = 3 \sin(-20°) \simeq 1,03$

$\underline{Z}^6 = [5;80°]^6 = [5^6 ; 6\times 80] = [15\,625 ; 480°] = [15\,625 ; 120°]$

2) Formules d'Euler : (6,5 points)

a) Compléter :

$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

$e^{5j\theta} + e^{-5j\theta} = 2\cos(5\theta)$

$-3e^{2j\theta} + 3e^{-2j\theta} = -3(e^{2j\theta} - e^{-2j\theta}) = -3\times 2j\sin 2\theta = -6j\sin 2\theta$

b) En utilisant les formules d'Euler, linéariser $sin^2(3\theta)$

$\sin^2(3\theta) = \left(\frac{e^{3j\theta} - e^{-3j\theta}}{2j}\right)^2 = \frac{1}{(2j)^2}\left(e^{3j\theta} - e^{-3j\theta}\right)^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = e^{3j\theta}$ et $b = e^{-3j\theta}$; $(2j)^2 = 2^2 j^2 = -4$

$\sin^2(3\theta) = -\frac{1}{4}\left((e^{3j\theta})^2 - 2e^{3j\theta} \cdot e^{-3j\theta} + (e^{-3j\theta})^2\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(e^{6j\theta} - 2 + e^{-6j\theta}\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(2\cos 6\theta - 2\right) = \frac{-2}{-4}\left(-\cos 6\theta + 1\right)$

$\sin^2(3\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 6\theta\right)$

3) Polynômes (4,5 points)

Soit P, le polynôme défini par : $P(x) = 7x - 2x^3 + 2 - 8x^9 + 3x^2$

Déterminer le degré de P, le monôme de de degré 3, le coefficient de x^5.

$\deg(P) = 9$; le monôme de degré 3 est $-2x^3$; le coefficient de x^5 est 0.

A quel ensemble P appartient-t-il ? $P \in \mathbb{R}[x]$

Chercher a, b et c tels que : $ax^3 + (3a - 2b)x^2 + (c - 3b)x + c - d + a = 2x^3 + 5x + 10$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 3a - 2b = 0 \\ c - 3b = 5 \\ c - d + a = 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3a/2 = 3 \\ c = 5 + 3b = 14 \\ d = c + a - 10 = 6 \end{cases}$$

Conclusion : $a = 2$; $b = 3$; $c = 14$ et $d = 6$.

Test1 – R2.04 - Outils Mathématiques et Logiciels - Sujet 3

Nom :.......................... Prénom : ....Groupe : ....

1) Complexes sous forme polaire : (9pts)

Soit $\underline{Z} = [7; 15°]$ et $\underline{Z'} = [2; -40°]$. Compléter :

$\underline{Z}.\underline{Z'} = [7;15°] \times [2;-40°] = [7\times2\,;15-40] = [14;-25°]$

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \frac{[7;15°]}{[2;-40°]} = [\frac{7}{2};15-(-40)] = [\frac{7}{2};55°]$

$\underline{Z} + \underline{Z}^* = 2Re(\underline{Z}) = 2Re([7;15°]) = 2\times7\cos(15°) \simeq 15{,}22$

$\underline{Z} - \underline{Z}^* = 2j\,Im(\underline{Z}) = 2j\,Im([7;15°]) = 2j\cdot7\sin(15°) \simeq 3{,}62j$

$\underline{Z}.\underline{Z}^* = [7;15] \times [7;-15] = [7\times7;15-15] = [49;0°] = 49$

ou $\underline{Z}.\underline{Z}^* = Z^2 = 49$

$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}^*} = \frac{[7;15]}{[7;-15]} = [\frac{7}{7};15-(-15)] = [1;30°]$

$Re(\underline{Z'}) = 2\cos(-40°) \simeq 1{,}53$

$Im(\underline{Z'}) = 2\sin(-40°) \simeq 1{,}29$

$\underline{Z}^6 = [7;15°]^6 = [7^6;6\times15] = [117\,649;90°]$

2) Formules d'Euler : (6,5 points)

a) Compléter :

$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$

$e^{9j\theta} - e^{-9j\theta} = 2j\sin(9\theta)$

$-5e^{3j\theta} - 5e^{-3j\theta} = -5(e^{3j\theta}+e^{-3j\theta}) = -5\times2\cos(3\theta) = -10\cos(3\theta)$

b) En utilisant les formules d'Euler, linéariser $sin(2\theta).\cos(3\theta)$

$$\sin(2\theta) \times \cos(3\theta) = \frac{e^{2j\theta} - e^{-2j\theta}}{2j} \times \frac{e^{3j\theta} + e^{-3j\theta}}{2}$$

$$= \frac{1}{4j}\left(e^{2j\theta} - e^{-2j\theta}\right).\left(e^{3j\theta} + e^{-3j\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{4j}\left(e^{2j\theta}.e^{3j\theta} + e^{2j\theta}.e^{-3j\theta} - e^{-2j\theta}.e^{3j\theta} - e^{-2j\theta}.e^{-3j\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{4j}\left(e^{5j\theta} + \underbrace{e^{-j\theta} - e^{j\theta}}_{-(e^{j\theta} - e^{-j\theta})} - e^{-5j\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{4j}\left(2j.\sin(5\theta) - 2j.\sin\theta\right)$$

$\sin(2\theta) \times \cos(3\theta) = \frac{2j}{4j}\left(\sin(5\theta) - \sin\theta\right)$ donc $\sin(2\theta) \times \cos(3\theta) = \frac{\sin(5\theta) - \sin\theta}{2}$

3) Polynômes (4,5 points)

Soit P, le polynôme défini par : $P(x) = x + 7x^3 - 5 + 9x^{12} + 10x^2$

Déterminer le degré de P, le monôme de de degré 3, le coefficient de x^5.

$deg(P) = 12$; le monôme de degré 3 est $7x^3$. Le coefficient de x^5 est 0.

A quel ensemble P appartient-t-il ? $P \in \mathbb{R}[X]$

Chercher a, b, c, d tels que : $ax^3 + (3a - b)x^2 + (2c - 2b)x + c - d - a = -x^3 + 4x^2 + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 3a - b = 4 \\ 2c - 2b = 0 \\ c - d - a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3a - 4 = -7 \\ c = b = -7 \\ d = c - a - 3 = -9 \end{cases}$$

Conclusion $a = -1$; $b = c = -7$; $d = -9$.