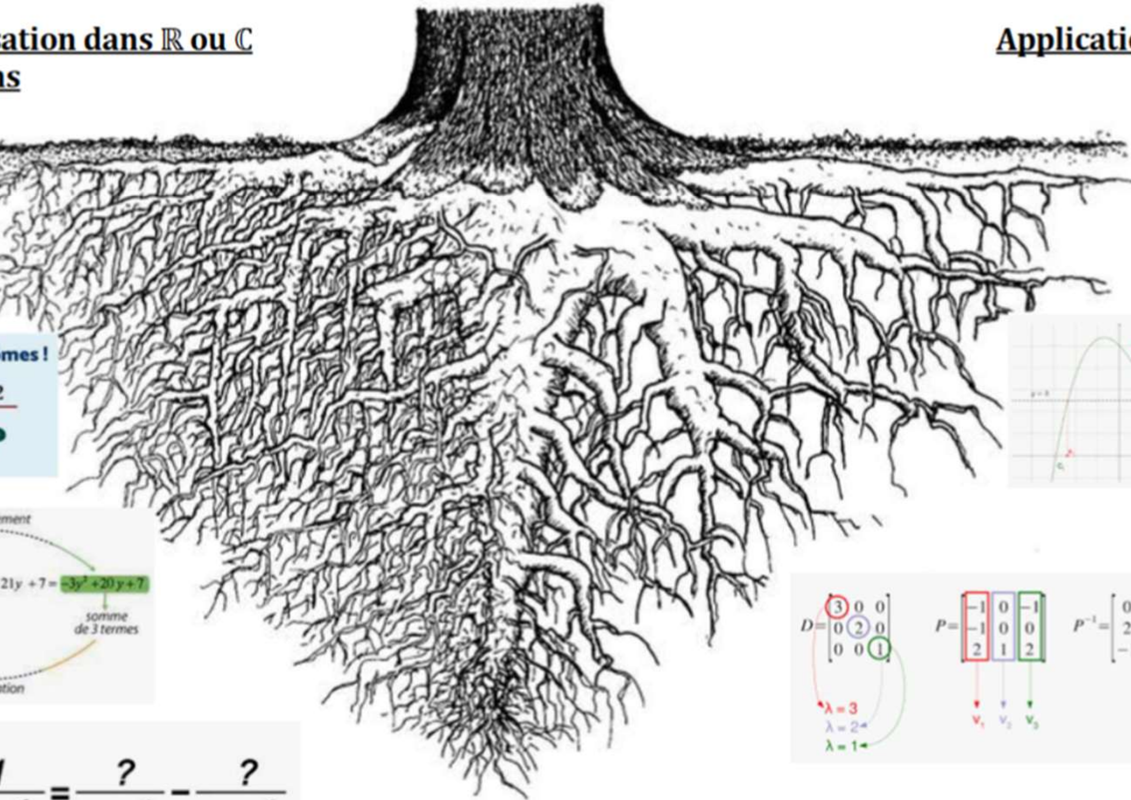
Chapitre 5 : Compléments sur les nombres complexes, Polynômes,

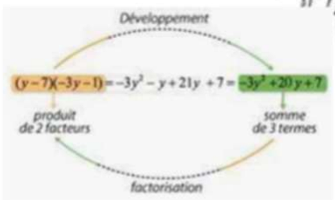
Factorisation dans ℝ ou ℂ
Fractions

Applications

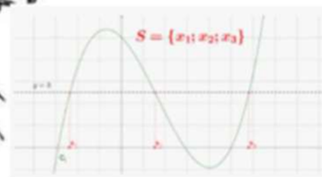


On divise des polynômes !

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 - x - 7 & x + 2 \\ \hline ?? & ?? \end{array}$$



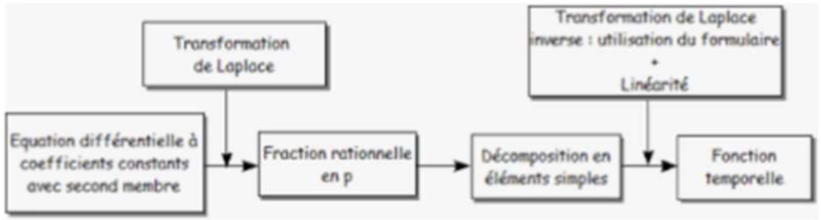
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{?}{x-1} - \frac{?}{x+1}$$



$$D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} \quad P=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-1&0&0\\2&1&2\end{bmatrix} \quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$

v_1 v_2 v_3



Partie A : Complément sur les nombres complexes

Page 5 chapitre 5

I. Rappels

$$\underline{Z} = x + j.y \text{ où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, donc $|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2 + y^2}$

L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$, on a alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

Page 6 chapitre 5

Détermination d'un argument à l'aide de la fonction arctangente

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \arg(j.b) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Partie A : Complément sur les nombres complexes

Page 5 chapitre 5

Le plan complexe est muni d'un RON $(O\,;\vec{OI},\ \vec{OJ})$ orienté dans le sens direct.

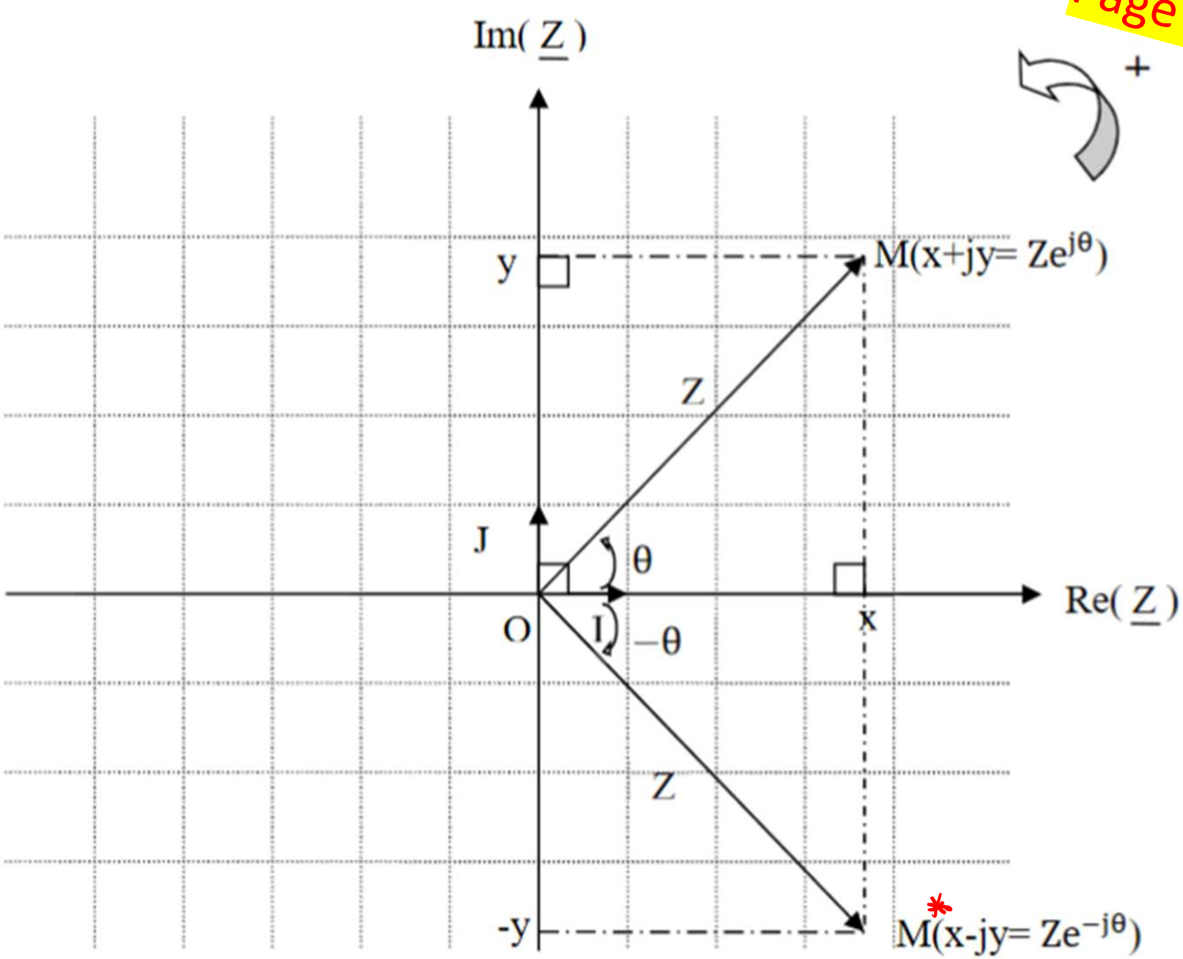
$\underline{Z} = x + j.y$ où $x,y \in \mathbb{R}$

Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.

$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.

$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.

$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



Page 5 chapitre 5

<u>**Forme algébrique**</u> **de $\underline{Z}$:** (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

<u>**Forme trigonométrique et forme polaire de $\underline{Z}$**</u> **:**

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.(\cos(\theta) + j.\sin(\theta))$ **aussi noté :** $\underline{Z} = [Z\,,\,\theta]$

<u>**Forme exponentielle, géométrique**</u> **: Euler a noté** $\boxed{e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)}$,

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

<u>**Nombre complexe conjugué**</u> **de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par :** $\underline{Z}^* = x - j.y$. **Si** $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$**, alors** $\underline{Z}^* = Z.\,e^{-j\theta}$

Produit, quotient et puissance

Page 6 chapitre 5

$\arg(\underline{Z}.\underline{Z}') = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $|\underline{Z}.\underline{Z}'| = |\underline{Z}|.|\underline{Z}'|$

$[Z, \theta] \times [Z', \theta'] = [ZZ', \theta + \theta']$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z}'|}$

$\frac{[Z, \theta]}{[Z', \theta']} = [\frac{Z}{Z'}, \theta - \theta']$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)

Page 6 chapitre 5

$\arg(\underline{Z}^n) = n \times \arg(\underline{Z}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $|\underline{Z}^n| = |\underline{Z}|^n$

$[Z, \theta]^n = [Z^n, n.\theta]$

Le module de $\underline{Z}^n$ est le module de $\underline{Z}$ à la puissance n, l'argument de $\underline{Z}^n$ est n fois l'argument de $\underline{Z}$ (à $2k\pi$ près)

Notes

Page 7 chapitre 5

① $z = [2; 30°] = \quad = \quad =$

Ecriture polaire, expo ou Euler, trigo, algébrique

② $Re([3; 90°]) =$

$Im([5; 60°]) =$

③ $z = \dfrac{[2; 30°]}{[2; 30°]^*} =$

④ $z = [3; 50°] \times [2; -20°] =$

$Re(z) =$ $\qquad$ $Im(z) =$

⑤ $z = [3; 20°]^9 =$

⑥ $[z; \theta] \times [z; \theta]^* =$

Notes

$30° = \frac{180°}{6} \to \frac{\pi}{6}$

① $\underline{Z} = [2 ; 30°] = 2.e^{j\pi/6} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + j$

(Z : module ; 30° : arg.)

Ecriture polaire — expo ou Euler — trigo — algébrique

② $Re([3 ; 90°]) = 3.\cos 90° = 0$

$Im([5 ; 60°]) = 5.\sin 60° = 5\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

③ $\underline{Z} = \frac{[2 ; 30°]}{[2 ; 30°]^*} = \frac{[2 ; 30°]}{[2 ; -30°]} = \left[\frac{2}{2} ; 30+30\right] = [1 ; 60°]$

④ $\underline{Z} = [3 ; 50°] \times [2 ; -20°] = [2\times3 ; 50-20] = [6 ; 30°]$

$Re(\underline{Z}) = 6\cos\frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$ $Im(\underline{Z}) = 6\sin\frac{\pi}{6} = 3$

⑤ $\underline{Z} = [3 ; 20°]^9 = [3^9 ; 9\times 20] = [3^9 ; 180°]$

⑥ $[Z ; \theta] \times \underbrace{[Z ; \theta]^*}_{[Z ; -\theta]} = [Z^2 ; 0] = Z^2 \underbrace{e^{j0}}_{1}$

$$\boxed{\underline{Z} \times \underline{Z}^* = Z^2}$$

$$\boxed{(a+jb)(a-jb) = a^2 + b^2}$$

$e^{j\pi} + 1 = 0$

Page 11 chapitre 5

L'écriture d'Euler : $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

la 1ère Formule d'Euler : $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta \iff \cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

la 2e Formule d'Euler : $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta \iff \sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

Page 8 chapitre 5

$$\underline{Z}+\underline{Z}^{*}=e^{j\theta}+e^{-j\theta}=2\mathrm{Re}\left(e^{j\theta}\right)=2\cos\theta \;\; ; \;\; \underline{Z}-\underline{Z}^{*}=e^{j\theta}-e^{-j\theta}=2j\mathrm{Im}\left(e^{j\theta}\right)=2j\sin\theta$$

$$\boxed{\textbf{Formules d'Euler : } \cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \textbf{ et } \sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}}$$

Page 11 chapitre 5

Compléter :

1) $e^{jx} + e^{-jx} =$

2) $e^{jx} - e^{-jx} =$

3) $e^{3j\theta} + e^{-3j\theta} =$

4) $e^{5j\theta} - e^{-5j\theta} =$

5) $2e^{j\theta} + 2e^{-j\theta} =$

6) $e^{-j\theta} - e^{j\theta} =$

7) $\cos(4\theta) =$

8) $3\sin(7\theta) =$

9) $e^{j\theta} \times e^{-j\theta} =$

10) $e^{-3j\theta} \times e^{5j\theta} =$

11) $7e^{j\theta} - 7e^{-j\theta} =$

12) $-5e^{3j\theta} - 5e^{-3j\theta} =$

$$e^{5j\theta} - e^{-5j\theta} = e^{j5\theta} - e^{-j5\theta}$$

$x = 5\theta$

Page 11 chapitre 5

$2^3 \times 2^5 = 2^8$

Compléter :

1) $e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x$

2) $e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x$

3) $e^{3j\theta} + e^{-3j\theta} = 2\cos(3\theta)$

4) $e^{5j\theta} - e^{-5j\theta} = 2j\sin(5\theta)$

5) $2e^{j\theta} + 2e^{-j\theta} = 2(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = 4\cos\theta$

6) $e^{-j\theta} - e^{j\theta} = -(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = -2j\sin\theta$

7) $\cos(4\theta) = \dfrac{e^{4j\theta} + e^{-4j\theta}}{2}$

8) $3\sin(7\theta) = 3 \cdot \dfrac{e^{7j\theta} - e^{-7j\theta}}{2j}$

$$\boxed{e^a \times e^b = e^{a+b}}$$

9) $e^{j\theta} \times e^{-j\theta} = e^0 = 1$

10) $e^{-3j\theta} \times e^{5j\theta} = e^{2j\theta}$

11) $7e^{j\theta} - 7e^{-j\theta} = 7(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = 14j\sin\theta$

12) $-5e^{3j\theta} - 5e^{-3j\theta} = -5(e^{3j\theta} + e^{-3j\theta})$

$= -10 \cdot \cos(3\theta)$

$\underline{z} \times \underline{z}^* = z^2$

$e^{j\theta} \times e^{-j\theta} = 1$

$e^{j\theta} \times e^{-j\theta} = (\cos\theta + j\sin\theta)(\cos\theta - j\sin\theta) = \cos^2\theta - (j\sin\theta)^2$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

4) Applications

Page 8 chapitre 5

- En GEII :

La puissance instantanée dissipée dans un dipôle linéaire, qui est soumis à une tension $v(t) = V_{eff}\sqrt{2}\cos\omega t$ et parcouru par un courant $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ est définie par la relation : $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

En utilisant les relations d'Euler, montrer que cette puissance instantanée est la somme d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal de pulsation double.

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$p(t) = V_{eff}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\cdot I_{eff}\cdot\sqrt{2}\,\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}$$

Soit $K = V_{eff}\cdot I_{eff}\cdot 2\times\frac{1}{4} = \frac{V_{eff}\,I_{eff}}{2}$

$$= K.\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\left(e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}\right)$$

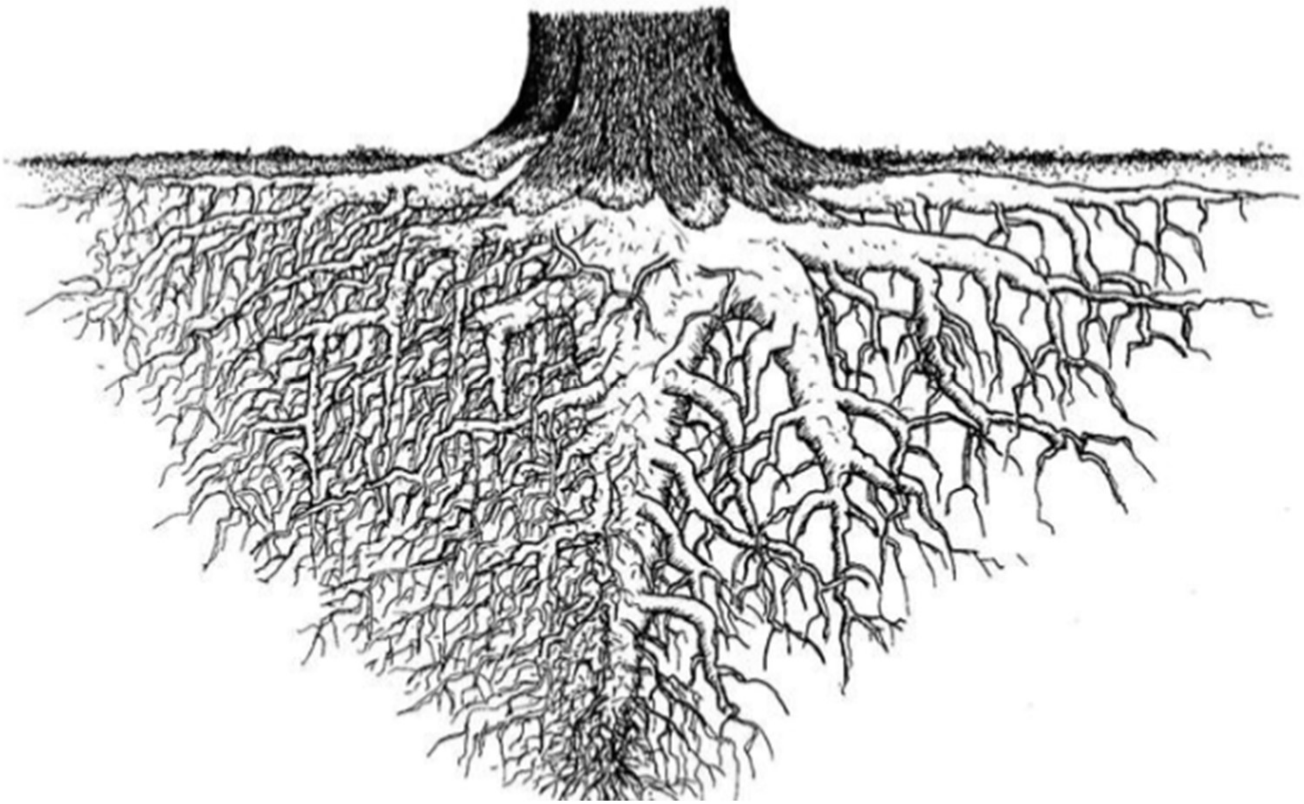
$$e^a \times e^b = e^{a+b}$$

terme constant

terme sinusoïdal de pulsation double.

$$p(t) = K.\left(e^{j(2\omega t+\varphi)} + \boxed{e^{-j\varphi} + e^{j\varphi}} + e^{-j(2\omega t+\varphi)}\right) = 2K\cos\varphi + 2K\cos(2\omega t+\varphi)$$

Chapitre 5 : Compléments sur les nombres complexes, Polynômes, Fractions rationnelles.



Partie B : Les polynômes

Page 16 chapitre 5

$\deg(7x^3+5x^2-4x+1)=3$

I. Généralités

1) Définitions

- Soit z, une variable réelle ou complexe ; n, un entier naturel ; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réelles ou complexes.
  On appelle polynôme, toute fonction P définie par :
  $$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$$
  On note aussi : $\boxed{P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}$
- a_k est appelé coefficient de z^k
- $a_k z^k$ est appelé monôme de degré k
- On appelle degré du polynôme P et on note deg(P) le plus haut degré des monômes de P. Dans les notations précédentes deg(P)=n.
- Si deg(P)=0, alors $P(z) = a_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.
  P est alors appelé polynôme constant, et deg(P) = 0

  $P(z) = 0 \quad \forall z$
- $\boxed{P(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0}$. Le polynôme P est alors appelé polynôme nul et on note : $P \equiv 0$, et $\deg(P) = -\infty$ par convention.

✓ Les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont appelées racines, ou zéros du polynôme P.

✓ On note $\boxed{\mathbb{R}[X]}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes.

Page 16 chapitre 5

$P(z) = 5z^2 + jz + z^3 - 1.$

$P \notin \mathbb{R}[x]$

$P \in \mathbb{C}[x]$

2) Exemple

$P(x) = x^5 - 3x^8 + x\sqrt{2} - 5 + 3x^7 + 0.x^2$

« P est un polynôme à coefficients réels » se note : $P \in \mathbb{R}[x]$

« Le degré de P est 8 », se note : $\deg(P) = 8$

Quel est le monôme de degré 7 ? $3x^7$

Quel est le coefficient de x^2 ? 0

Ordonner P suivant les puissances croissantes :

$P(x) = -5 + x\sqrt{2} + x^5 + 3x^7 - 3x^8$

suivant les puissances décroissantes.

$P(x) = -3x^8 + 3x^7 + x^5 + x\sqrt{2} - 5.$

Page 17 chapitre 5

* $P(x) = 7x^3 - 2x + 1$ $\qquad Q(x) = x^2 + 3x + 2$

$\deg(P) = 3$ $\qquad \deg(Q) = 2$

$(P+Q)(x) = 7x^3 + x^2 + x + 3$

$\deg(P+Q) = 3$ $\qquad$ conjecture : $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P) ; \deg(Q))$

$(-3.P)(x) = -21x^3 + 6x - 3$

$\deg(-3P) = 3$

$(P.Q)(x) = 7x^5 + 21x^4 + 14x^3 - 2x^3 - 6x^2 - 4x + x^2 + 3x + 2 = 7x^5 + 21x^4 + 12x^3 - 5x^2 - x + 2$

$\deg(P.Q) = 5$ $\qquad$ Conjecture $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

* $P(x) = 7x^3 - 2x + 1$ $\qquad Q(x) = -7x^3 + x + 3$

$\deg(P) = \deg(Q) = 3$

$(P+Q)(x) = -x + 4$ $\qquad \deg(P+Q) = 1$

Page 18 chapitre 5

3) Opérations

Soit : $\mathbf{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$. deg(P)=n

et : $\mathbf{Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ... + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k}$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$. deg(Q)=m.

✓ Egalité

$$\boxed{\mathbf{P \equiv Q \Leftrightarrow P(z) = Q(z) \ \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \deg(P) = \deg(Q) = n \\ a_k = b_k \ \ \forall\, 0 \le k \le n \end{cases}}}$$

$\equiv$

Page 18 chapitre 5

- ✓ <u>Addition</u>

$$(P+Q)(z) = P(z) + Q(z) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1).z + (a_2 + b_2).z^2 + ... + (a_k + b_k)z^k + ...$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{(P+Q)(z) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) z^k} \\ \mathbf{\deg(P+Q) \leq \max\left(\deg(P), \deg(Q)\right)} \end{array}}$$

- ✓ <u>Multiplication par un scalaire</u> $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{\lambda.P(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda.a_k z^k} \\ \mathbf{\deg(\lambda.P) = \deg(P)} \end{array}}$$

Page 18 chapitre 5

✓ Multiplication par un polynôme

$$(PQ)(z) = P(z).Q(z)$$

$$= \left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n\right)\left(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_{m-1} z^{m-1} + b_m z^m\right)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) z^3$$

$$+ \underbrace{(a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0)}_{\sum_{i+j=4} a_i b_j} z^4 + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) z^n$$

$+$ etc...

Σ

$$(PQ)(z) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) . z^k$$

deg(P.Q) = deg(P) + deg(Q)

Page 17 chapitre 5

Exercice : Soit $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

Calculer $P(-1)$, puis factoriser P.

$P(-1) = 3.(-1)^3 - 2(-1)^2 - 3(-1) + 2$

$= -3 - 2 + 3 + 2$

Rappel : $P(x) = ax^2 + bx + c = a.(x - x_1)(x - x_2)$

$P(-1) = 0$ alors P est factorisable par $(x+1)$

donc $\boxed{\deg P = 3}$

$P(x) = (x+1).(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c$

? ? ?

$P(x) = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b + a = -2 \\ c + b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 - a = -5 \\ \text{ok.} \\ c = 2 \end{cases}$

donc $P(x) = (x+1)(3x^2 - 5x + 2)$

$P(x) = (3x^2 - 5x + 2)\underline{\underline{(x+1)}}$

a

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4(3)(2) = 25 - 24 = 1.$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+1}{6} = 1$; $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$P(x) = 3\underline{\underline{(x+1)}}(x-1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)$

$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

C'est le polynôme P factorisé : il est écrit comme produit de $\underline{\underline{3}}$ polynômes de degré 1 car $\deg P = 3$

$\boxed{A \geq B}$

Page 22 chapitre 5

dividende $A = 175$ | $6 = B$ diviseur

55 | $29 = Q$ quotient

Reste $R = 1$

Vérification : $A = B \times Q + R$

$R < B$ la division s'arrête

$\boxed{A \geq B}$ $B \neq 0$

dividende $A = 175$ | $6 = B$ diviseur

55

reste $R = 1$ | $29 = Q$ quotient

La division d'entiers s'arrête lorsque $R < B$

Vérification : $BQ + R = 6 \times 29 + 1 = 175 = A$

III. Factorisation d'un polynôme de degré >2

Page 23 chapitre 5

1) Division euclidienne de polynômes

Exemple Soit $A(x) = x - 2x^2 + x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + 2$

Effectuer la division euclidienne de A par B, c'est effectuer la division de A par B en ordonnant A et B suivant les puissances décroissantes.

$\deg A = 3 \geq \deg B = 2$

dividende

$$
\begin{array}{l|l}
A = x^3 - 2x^2 + x + 1 & x^2 + 2 \quad = B \text{ diviseur} \\
\hline
-(x^3 + 0 + 2x + 0) & x - 2 = Q \text{ quotient} \\
\quad -2x^2 - x + 1 & \text{La division s'arrête lorsque } \deg A < \deg B \\
-(-2x^2 \quad -4) & \text{Vérification : } BQ + R = A \\
\text{reste } R = -x + 5 & (x^2+2)(x-2) - x + 5 = \cdots = x^3 - 2x^2 + x + 1 \text{ ok}
\end{array}
$$

Page 23 chapitre 5

Définition / Théorème de la division euclidienne de polynômes

Soit A et B deux polynômes à coefficients complexes tels que : $B \neq 0$ et $\deg(A) \geq \deg(B)$.

Il existe alors un unique couple de polynômes (Q,R) vérifiant : $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$.

On dit alors que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
La division euclidienne de A par B est aussi appelée division de A par B suivant les puissances décroissantes.

- ✓ Remarque Si R=0, alors A=BQ. On dit alors que le polynôme A est factorisable par B, ou que B divise A, ou encore que A est divisible par B.

4) Factorisation d'un polynôme de degré >2

Page 24 chapitre 5

Soit P, un polynôme de degré quelconque, à coefficients quelconques.

a) α est une racine de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par (x- α)

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists! Q \in \mathbb{C}[X] \,/\, P(x) = (x-\alpha).Q(x)$$

il existe — un unique — tel que

Page 22 ou 26 chapitre 5

Démonstration du a) page 24 :

$$P(\alpha) = 0 \overset{①}{\Longrightarrow} P(x) = (x-\alpha).Q(x)$$

$$P(\alpha) = 0 \overset{②}{\Longleftarrow} P(x) = (x-\alpha).Q(x)$$

$\Longleftarrow$ Si $P(x) = (x-\alpha).Q(x)$ alors $P(\alpha) = (\alpha-\alpha).Q(\alpha) = 0$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Si } P(\alpha) = 0}$

$A = P(x)$ | $x-\alpha = B$

$R(x)$ | $Q(x)$

tel que : $\begin{cases} P(x) = (x-\alpha).Q(x) + R(x) \; (*) \\ \deg R < \deg(x-\alpha) = 1 \text{ alors } \\ R(x) = \text{cte} \end{cases}$

Comme $P(\alpha) = 0 \overset{(*)}{=} \cancel{(\alpha-\alpha)}.Q(\alpha) + R(\alpha)$

Ainsi $R(x) = 0 \quad \forall x$ CQFD

Page 24 chapitre 5

✓ Exemple 1 Chercher une racine évidente du polynôme P, défini par : $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. Puis le factoriser (l'écrire comme produit de polynômes de plus bas degré possible)

$P(1) = 1^3 - 3.1^2 + 4.1 - 2 = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$ alors P est divisible par $x - 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
A = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 & x - 1 = B \\
\hline
-(x^3 - x^2 \quad) & x^2 - 2x + 2 = Q \\
\quad -2x^2 + 4x - 2 & \\
-(-2x^2 + 2x \quad) & \\
\quad\quad 2x - 2 & \\
-(2x - 2) & \\
R = 0 &
\end{array}
$$

donc :
$P(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$

$\Delta = -4 < 0$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{2 - j\sqrt{4}}{2} = \dfrac{\overset{2(1-j)}{2 - 2j}}{2} = 1 - j \\ x_2 = x_1^* = \overline{x_1} = 1 + j \end{cases}$$

Alors : $p(x) = (x-1)\underbrace{(x-1+j)(x-1-j)}$

P est factorisé dans $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{R}$: $P(x) = (x-1)\underbrace{(x^2 - 2x + 2)}$ est la factorisation dans $\mathbb{R}$.

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(-2) = P(3) = 0$

Alors P est factorisable par ? $(x+2)(x-3)$.

Page 24 chapitre 5

b) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$

$P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \ldots = P(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \;/\; P(x) = (x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)Q(x)$

Page 25 chapitre 5

✓ Exemple 2 Soit le polynôme : $P(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10$. Chercher au moins deux racines évidentes de P, puis en déduire les autres. Quelle est alors la factorisation de P ?

$P(1) = 1 - 3 - 11 + 3 + 10 = 0$

$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 - 11(-1)^2 + 3(-1) + 10 = 1 + 3 - 11 - 3 + 10 = 0$

P est alors divisible par $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10 & x^2 - 1 \\
\hline
-(x^4 \quad - x^2 \quad) & x^2 - 3x \\
-3x^3 - 10x^2 + 3x + 10 & \\
-(-3x^3 \quad + 3x) & \\
-10x^2 + 10 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
-10x^2 + 10 & x^2 - 1 \\
\hline
-(-10x^2 + 10) & x^2 - 3x - 10 \\
0 &
\end{array}$$

$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 3x - 10)$

$= (x-1)(x+1)(x-5)(x+2)$

$\Delta = 49 \quad x_1 = \frac{3+7}{2} = 5$

4) Factorisation d'un polynôme de degré >2

Page 24

Soit P, un polynôme de degré quelconque, à coefficients quelconques.

a) α est une racine de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par (x- α)

$$P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ P(x) = (x - \alpha).\, Q(x)$$

b) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha_1).(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)$

$$P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \ldots = P(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ P(x) = (x - \alpha_1).(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)Q(x)$$

- Soit $P(x) = \overbrace{(x-1)^2}^{f}\overbrace{(x+3)}^{g}$ alors $P(1) = 0$ et $P(-3) = 0$

$P'(x) = \underbrace{2(x-1)}_{f}.\underbrace{(x+3)}_{g} + (x-1)^2 . 1$ $\qquad f' = \left((x-1)^2\right)' = 2.(x-1).1$

$P''(x) = 2.(x+3) + 2(x-1) + 2(x-1)$

$\longrightarrow P'(1) = 0$ et $P'(-3) \neq 0$

$\longrightarrow P''(1) \neq 0$ et $P''(-3) \neq 0$

- Soit $P(x) = \overbrace{(x+5)^3}^{f}\overbrace{(x-2)}^{g}$ alors $P(-5) = P(2) = 0.$

$P'(x) = \underbrace{3(x+5)^2}_{f}.\underbrace{(x-2)}_{g} + (x+5)^3 . \longrightarrow P'(-5) = 0 \qquad P'(2) \neq 0$

$P''(x) = 6(x+5).(x-2) + 3(x+5)^2 + 3(x+5)^2 . 1 \longrightarrow P''(-5) = 0$

$P^{(3)}(x) = 6(x-2) + 6(x+5) + 6(x+5) + 6(x+5) \longrightarrow P^{(3)}(-5) \neq 0$

c) α est une racine de P et P′ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^2$

On dit alors que α est une racine double de P (ou est de multiplicité 2). Page 24 chapitre 5

$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \exists!\ Q \in \mathbb{C}[X]\ /\ P(x) = (x-\alpha)^2 . Q(x)$

d) α est une racine de P, P′ et P″ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^3$. On dit alors que α est une racine triple de P (ou est de multiplicité 3).

$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ et $P^{(3)}(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \exists!\ Q \in \mathbb{C}[X]\ /\ P(x) = (x-\alpha)^3 . Q(x)$

Etc…

✓ Exemple 3 Déterminer une racine évidente multiple du polynôme P suivant, puis le factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

Page 25 chapitre 5

$P(1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2 \implies P'(1) = 4 - 6 + 4 - 2 = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 12x + 4 \implies P'(1) \neq 0$

1 est racine double de P.

P est divisible par $(x-1)^2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 & x^2 - 2x + 1 \\
\hline
-(x^4 - 2x^3 + x^2) & x^2 + 1 = Q(x) \\
\hline
x^2 - 2x + 1 & \\
-(x^2 - 2x + 1) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$P(x) = (x-1)^2 (x^2 + 1)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$

$P(x) = (x-1)^2 \cdot (x - j)(x + j)$ est factorisé dans $\mathbb{C}$

3) Méthodologie pour factoriser un polynôme de degré>2

Page 27 chapitre 5

- ✓ Définition

Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}$ (dans $\mathbb{R}$), c'est l'écrire comme produit de polynômes à coefficients complexes (réels) de plus bas degré possible.

- ✓ Théorème de D'Alembert

- **Soit P, un polynôme de degré n : $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$.**
  P possède alors n racines dans l'ensemble $\mathbb{C}$: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ distinctes ou non. On peut alors factoriser P dans $\mathbb{C}$: $P(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n)$
  P est donc factorisable dans $\mathbb{C}$ en n polynômes de degré 1.

- **Soit P, un polynôme de degré n à coefficients réels :**
  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.
  P est factorisable dans $\mathbb{R}$ en produit de
  - polynômes de degré 1 à racine réelle : (x-a) avec $a \in \mathbb{R}$
  et de - en polynômes de degré 2 à racines complexes conjuguées.

Page 27 chapitre 5

✓ Méthodes

- Chercher une ou plusieurs racines évidentes parmi : 0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; j ; -j ;… avec éventuellement leur multiplicité. Puis effectuer une division euclidienne.
- Penser aux identités remarquables.
- Ou bien résoudre P(z)=0, puis factoriser.

✓ Exemple 1 Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme suivant : $P(z) = \underbrace{z^4 - 1}_{A^2 - B^2}$.

$P(z) = (z^2)^2 - 1^2 = (z^2-1)(z^2+1)$

$P(z) = (z-1)(z+1)\underbrace{(z-j)(z+j)}$ est factorisé dans $\mathbb{C}$.

Factoriser alors le polynôme P dans $\mathbb{R}$:

$P(z) = (z-1)(z+1)(z^2+1)$

✓ Méthode pour factoriser dans $\mathbb{R}$ On factorise d'abord P dans $\mathbb{C}$, puis on multiplie les paires de polynômes de degré 1 à racines complexes conjuguées.

En effet : $P(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = \ldots = x^2 \underbrace{-\bar{\alpha}x - \alpha x}_{} + \alpha\bar{\alpha} \ldots$

$\ldots P(x) = x^2 - \underbrace{(\alpha+\bar{\alpha})}_{\substack{2.\mathrm{Re}(\alpha) \\ \in\mathbb{R}}} x + \underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{\substack{|\alpha|^2 \\ \in\mathbb{R}}} \in \mathbb{R}[X] \ldots$

$a+jb+a-jb = 2a$

$(a+jb)(a-jb) = a^2+b^2$

Exercice 6 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$; $\boxed{P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$

$P(-1) = \underbrace{-1+1}\underbrace{-1+1}\underbrace{-1+1} = 0$

$P'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \implies P'(-1) = 5 - 4 + 3 - 2 + 1 \neq 0$

-1 est racine simple de P, qui est divisible par $x+1$.

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & x+1 \\ \hline & x^4 + x^2 + 1 \\ 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x+1)\underbrace{(x^4 + x^2 + 1)}$

On pose $X = x^2$ et on résout :

$X^2 + X + 1 = 0$.

Exercice 6 Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$; $\boxed{P(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}$

$$\left.\begin{aligned} &P(-1) = -1+1-1+1-1+1 = 0 \\ &P'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ &P'(-1) = 5-4+3-2+1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \text{P est divisible par } x+1.$$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 & x+1 \\ \hline \quad\vdots & x^4 + x^2 + 1 \\ \quad 0 & \end{array}$$

bicarré ! $\to$ On pose $X = x^2$ et on résout

$X^2 + X + 1 = 0$

$\Delta = \dots$

$x^2 = X_1 = \dfrac{-1+j\sqrt{3}}{2} = \dots = e^{2j\pi/3} = x^2$

$x^2 = X_2 = e^{-2j\pi/3} = x^2$

On résout $x^2 = e^{2j\pi/3}$ et $x^2 = e^{-2j\pi/3}$

$$\Leftrightarrow x = \pm\left(e^{2j\pi/3}\right)^{1/2} = \underbrace{\pm e^{j\pi/3}} \qquad \Leftrightarrow x = \pm\left(e^{-2j\pi/3}\right)^{1/2} = \underbrace{\pm e^{-j\pi/3}}$$

La factorisation de P dans $\mathbb{C}$ est donc :

$$P(x) = (x+1)\underbrace{\left(x - e^{j\pi/3}\right)}_{\otimes}\underbrace{\left(x + e^{j\pi/3}\right)}_{\otimes}\underbrace{\left(x - e^{-j\pi/3}\right)}_{\otimes}\underbrace{\left(x + e^{-j\pi/3}\right)}_{\otimes}$$

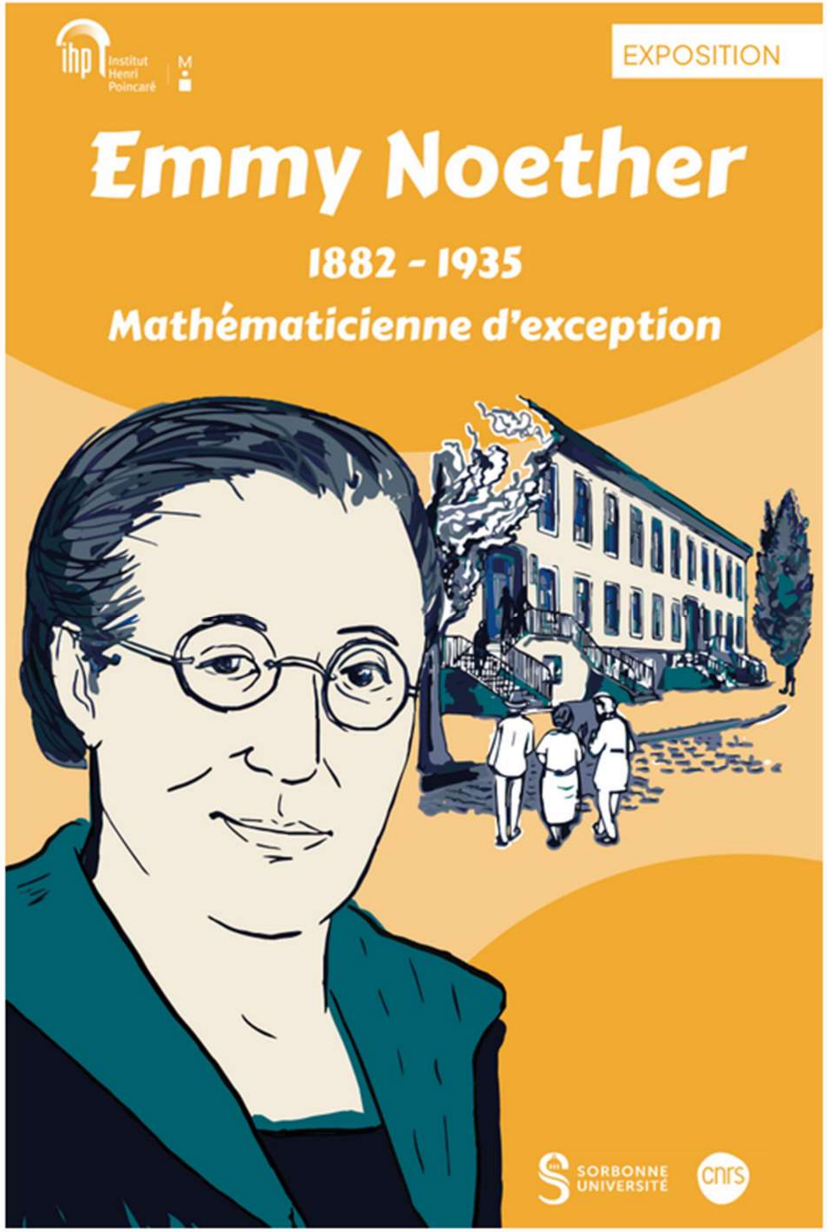
La factorisation de P dans $\mathbb{R}$ est donc :

$$P(x) = (x+1)\left(x^2 - \underset{\otimes}{x} + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$$

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}(\alpha)\,x + |\alpha|^2$$

$$\alpha = e^{j\pi/3} \qquad \mathrm{Re}\left(e^{j\pi/3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$|\alpha|^2 = 1$$



Le 20 mars à 17h30 dans l'amphi 400 aura lieu
une conférence sur la mathématicienne Emmy Noether.

Cette grande figure des maths et de la physique sera ensuite exposée à la BU de notre Université.

Ⓐ DSES $F(s) = \dfrac{1}{s(\tau s+1)} = \dfrac{A(s)}{B(s)}$ où $\tau \in \mathbb{R}$, puis déterminer $\cancel{\mathcal{L}}(F(s))$ voir page 33

(suivre les étapes page 31)

Page 36&37 chapitre 5

$T_L^{-1}(F(s))$

→ Etape 1 : On factorise $B(s) = s.(\tau s+1)$ est déjà factorisé.

Ses racines sont : 0 et $-\dfrac{1}{\tau}$

Les pôles de la fraction F sont 0 et $-\dfrac{1}{\tau}$ et ils sont simples.

→ Etape 2 : F est irréductible car A et B n'ont pas de facteur commun.

→ Etape 3 : $\deg A = 0 < \deg B = 2$, F n'a donc pas de partie entière

→ Etape 4 : $F(s) = \dfrac{1}{s(\tau s+1)} = \dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{\tau s+1}$

$a = \left[s.F(s)\right]_{s=0}$

$a = \left[\dfrac{1}{\tau s+1}\right]_{s=0} = 1$

$b = \left[(\tau s+1).F(s)\right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = \left[\dfrac{1}{s}\right]_{s=-\frac{1}{\tau}} = \dfrac{1}{-\frac{1}{\tau}} = -\tau$

$$\boxed{F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{\tau}{\tau s+1}}$$

$T_L^{-1}(F(s)) = T_L^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right) - \tau . T_L^{-1}\left(\dfrac{1}{\tau s+1}\right)$

$= U(t) - \tau . \dfrac{1}{\tau} . T_L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right)$

$f(t) = U(t) - e^{-\frac{1}{\tau}t} . U(t)$

I. Décomposition en somme d'éléments simples d'une fraction rationnelle $\frac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont des polynômes, et application au calcul de primitives.

Page 31 chapitre 5

1) Factoriser le dénominateur B de F.

2) Déterminer si F est réductible, et si c'est le cas la réduire.

Une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$ est dite irréductible lorsque les polynômes A et B n'ont pas de facteurs communs, ou bien lorsque les polynômes A et B n'ont aucune racine commune.

3) Déterminer si F a une partie entière, et si c'est le cas noter G la fraction restante.

Soit $F = \frac{A}{B}$, une fraction irréductible. Deux cas de figure se présentent :

- Soit deg(A) ≥ deg(B), on peut alors effectuer la division euclidienne de A par B. On obtient donc les polynômes Q et R tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{ et } F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Q est appelé partie entière de F.

- Soit deg(A)<deg(B), on ne peut alors pas effectuer de division euclidienne de A par B, et F ne possède pas de partie entière.

4) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de G, puis calculer les coefficients a_i voir ci-dessous.

Soit G, une fraction irréductible, sans partie entière, à pôles simples : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

On a alors : $G(x) = \dfrac{P(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$ **avec** $\begin{cases} \deg(P) < n \\ P(\alpha_i) \neq 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n \end{cases}$

Et G se décompose en somme d'éléments simples :

$G(x) = \dfrac{a_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{a_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{x-\alpha_n}$ avec $a_i = [(x-\alpha_i)G(x)]_{x=\alpha_i}$ $\forall 1 \leq i \leq n$.

Page 31 chapitre 5

Page 33 chapitre 5

1) Formulaire

<u>Définition</u> Soit f, une fonction causale (i.e. $f(t) = 0\ \forall t < 0$) , on appelle transformée de Laplace de la fonction f, la fonction F, définie par : $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}.dt$

On note : $T_L[f(t)]= F(s)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}.dt$. Le tableau ci-après :

$f(t)$ $\xrightarrow{T_L}$ $F(s)$; $F(s)$ $\xrightarrow{T_L^{-1}}$ $f(t)$

f, fonction causale	$T_L[f(t)]$ ou $F(s)$
$\delta(t)$	1
$U(t)$ ou 1 (échelon - unité, Heaviside, $\mathcal{U}(t)$)	$\frac{1}{s}$
$t^n.U(t)$ ou t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$Cos(\omega t).U(t)$ ou $Cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$Sin(\omega t).U(t)$ ou $Sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$ ou e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Si f est dérivable sur $[0, +\infty[$ $f'(t)$	$s.F(s) - f(o)$
Si f est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ $f''(t)$	$s^2.F(s) - s.f(o) - f'(0)$

$$\frac{1}{\tau s+1} = \frac{1}{\tau\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}$$

$$= \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}$$

Ⓑ DSES de $G(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, puis déterminer $\int G(x)\,dx$

→ Etape 1 : On factorise

$B(x) = (x^2+1)(x-3)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$.

$B(x) = (x+j)(x-j)(x-3)$ est factorisé dans $\mathbb{C}$

→ Etape 2 : G est irréductible car A et B n'ont pas de facteur commun.

→ Etape 3 : $\deg A = 1 < \deg B = 3$, G n'a donc pas de partie entière

→ Etape 4 DSES dans $\mathbb{C}$

$$G(x) = \frac{2x+1}{(x-j)(x+j)(x-3)} = \frac{a}{x-j} + \frac{b}{x+j} + \frac{c}{x-3}$$

$$a = \Big[(x-j)G(x)\Big]_{x=j} = \left[\frac{2x+1}{(x+j)(x-3)}\right]_{x=j} = \frac{2j+1}{2j(j-3)} = \frac{2j+1}{-2-6j}$$

$$a = \frac{2j+1}{-2-6j} \times \frac{-2+6j}{-2+6j} = \frac{-14+2j}{2^2+6^2} = \frac{-14+2j}{40} = \frac{-7+j}{20}$$

$$b = \bar{a} = a^* = \frac{-7-j}{20}$$

$$c = \Big[(x-3)G(x)\Big]_{x=3} = \left[\frac{2x+1}{x^2+1}\right]_{x=3} = \frac{7}{10}$$

La DSES de G dans $\mathbb{C}$ est donc :

$$G(x) = \underbrace{\frac{-7+j}{20}\cdot\frac{1}{x-j} + \frac{-7-j}{20}\cdot\frac{1}{x+j}}_{\underline{z} + \underline{z}^* = 2\cdot\mathrm{Re}(\underline{z}) \text{ pour DSES dans } \mathbb{R}} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{x-3}$$

$$Z = \frac{-7+j}{20}\,\frac{1}{x-j} = \frac{-7+j}{20(x-j)} \times \frac{x+j}{x+j} = \frac{-7x-1+j(\cdots)}{20(x^2+1)}$$

$$2\times \mathrm{Re}(Z) = 2\times\frac{-7x-1}{20(x^2+1)} = \frac{-7x-1}{10(x^2+1)}$$

La DSES dans $\mathbb{R}$ est donc : $G(x) = \dfrac{-7x-1}{10(x^2+1)} - \dfrac{7}{10}\,\dfrac{1}{x-3}$

pour calculer :

$$\int G(x)\,dx = \int\left(-\frac{7}{2\times 10}\,\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{10}\,\frac{1}{x^2+1} - \frac{7}{10}\,\frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$\int G(x)\,dx = -\frac{7}{20}\cdot\ln(x^2+1) - \frac{1}{10}\cdot\arctan x - \frac{7}{10}\cdot\ln|x-3| + \text{cte}$$

Remarque pour DSES G directement dans $\mathbb{R}$:

$$G(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{c}{x-3}$$ pour calculer a et b : $aj+b = \left[(x^2+1)G(x)\right]_{x=j}$?

$a = -\frac{7}{10}$ et $b = -\frac{1}{10}$.