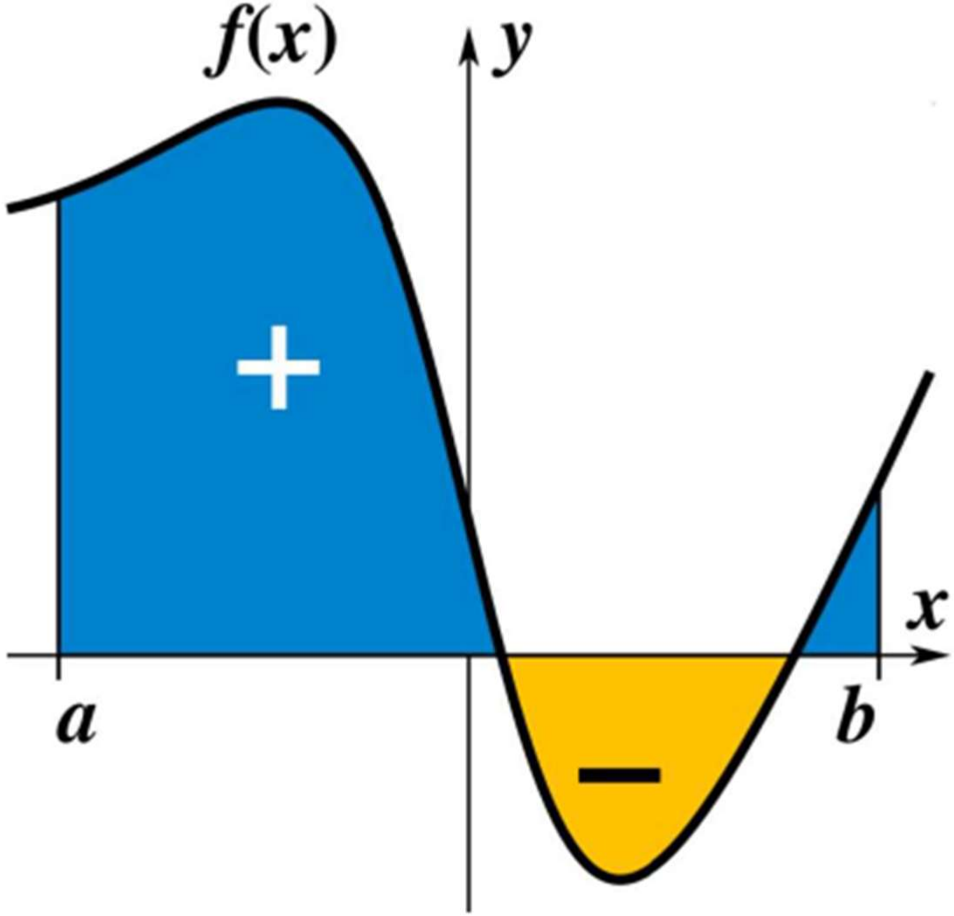
# Chapitre 7 : Compléments sur le calcul intégral



## Partie A : Rappels sur les propriétés et calculs de base

Page 4 chapitre ~~6~~ 7

**<u>Théorèmes/Définitions/Notations</u> :**

**1) Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]**

**2) Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.**

**3) On note $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :**

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

**4) Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On a alors :**

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Page 4 chapitre 7

**Propriétés**

**1) Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit $\alpha$ et $\beta$ deux nombres réels. On a alors :**

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

**2) Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a,b,c trois réels de I. On a alors :** $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

**3)** $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

**4) Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] telles que $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, on a alors :**

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

**<u>Intégrales, parité et périodicité</u> :**

**1) Si f est une fonction paire et continue sur [-a,a], alors :** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$

**2) Si f est une fonction impaire et continue sur [-a,a], alors :** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

**3) Si f est une fonction T-périodique, continue sur tout intervalle [a,a+T], alors :**

$$\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$$

Page 6 chapitre 7

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\int x^{\alpha}.dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \; ; \; \alpha \neq -1$ | $\int U'.U^{\alpha}dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \; ; \; \alpha \neq -1$ |
| 2 | $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + cte$ | $\int \frac{U'}{2\sqrt{U}} dx = \sqrt{U} + cte$ |
| 3 | $\int e^{x}.dx = e^{x} + cte$ | $\int U'.e^{U}.dx = e^{U} + cte$ |
| 4 | $\int \frac{1}{x} dx = \ln(\lvert x \rvert) + cte$ | $\int \frac{U'}{U} dx = \ln(\lvert U \rvert) + cte$ |
| 5 | $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + cte$ | $\int \frac{U'}{U^2} dx = -\frac{1}{U} + cte$ |
| 6 | $\int \cos(x).dx = \sin(x) + cte$ | $\int U'.\cos(U).dx = \sin(U) + cte$ |
| 7 | $\int \sin(x).dx = -\cos(x) + cte$ | $\int U'.\sin(U).dx = -\cos(U) + cte$ |
| 8 | $\int \frac{1}{\cos^2(x)}.dx = \tan(x) + cte$ | $\int \frac{U'}{\cos^2(U)}.dx = \tan(U) + cte$ |
| 9 | $\int (1+\tan^2(x)).dx = \tan(x) + cte$ | $\int U'.(1+\tan^2(U)).dx = \tan(U) + cte$ |
| 12 | $\int \frac{1}{1+x^2}.dx = \arctan(x) + cte$ | $\int \frac{U'}{1+U^2}.dx = \arctan(U) + cte$ |

# Notes

Page 5 chapitre ~~6~~ 7

ⓐ $\int u' u^{\alpha} \, dt = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \quad ; \alpha \neq -1$

$$I = \int_0^3 \underbrace{2t}_{u'} \underbrace{(t^2-9)^{10}}_{u^{10}} \, dt = \left[ \frac{(t^2-9)^{11}}{11} \right]_0^3 = \frac{1}{11}\left(0 - (-9)^{11}\right) = \frac{9^{11}}{11}$$

$u = t^2 - 9 \Rightarrow u' = 2t \qquad \alpha = 10$

ⓑ $\int u' . e^{u} \, dt = e^{u} + cte$

$$J = \int_0^{\pi} \underbrace{\cos t . e^{\sin t}}_{u' . e^{u}} \, dt = \left[ e^{\sin t} \right]_0^{\pi} = e^{\sin \pi} - e^{\sin 0} = e^0 - e^0 = 0$$

$u = \sin t \Rightarrow u' = \cos t$

# Notes

Page 5 chapitre 7

ⓒ $\int \frac{U'}{U}\, dt = \ln|U| + cte$

$$K = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{6x}{3x^2+4}\, dx = \frac{1}{6}\cdot\left[\ln(3x^2+4)\right]_0^1 = \frac{1}{6}\left(\ln 7 - \ln 4\right) = \frac{1}{6}\cdot\ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

$U = 3x^2+4 \Longrightarrow U' = 6x$

ⓓ $\int U' \cdot \cos U\, dt = \sin U + cte$

$$\frac{1}{2}\int 2t\cdot\cos(t^2+1)\, dt = \frac{1}{2}\sin(t^2+1) + cte$$

$U = t^2+1 \Longrightarrow U' = 2t$

$$\boxed{\int U'\cdot f(U)\, dt = F(U) + cte}$$

produit

Si aucune formule du tableau p. 6, ne permet de calculer l'intégrale d'un produit, alors on applique l'I.P.P. Page 7 chapitre 7

$$\int_a^b (U.V)'dt = \int_a^b (U'V + UV')\,dt$$

$$[U.V]_a^b = \int_a^b U'V\,dt + \underbrace{\int_a^b UV'\,dt}_{??}$$

$\boxed{\text{IPP}}$ :

$$\int_a^b U.V'\,dt = [U.V]_a^b - \underbrace{\int_a^b U'V\,dt}_{\text{facile à calculer.}}$$

# Partie B : Méthodes de calcul

Page 8 chapitre ~~6~~ 7

## I. Intégration par parties

### 1) La formule

**Soit u et v deux fonctions dérivables sur [a,b] telles que u' et v' sont continues sur [a,b].**

**On a alors :** $\int_a^b u(t).v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)dt$

Démonstration

$[u(t).v(t)]' =$ $u'(t).v(t) + u(t).v'(t)$.

$\underbrace{\int_a^b [u(t).v(t)]' dt} = \int_a^b u'(t).v(t)\,dt + \int_a^b u(t).v'(t)\,dt$

$= [u(t).v(t)]_a^b$

Donc : $\int_a^b u(t).v'(t)dt =$ $[u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)\,dt$

Page 8 chapitre 7

**2)** Remarques 1° Cette formule s'applique lorsqu'on cherche à calculer l'intégrale d'un produit de fonctions qui n'est pas de la forme U'.f '(U) (voir les formules de la colonne droite du tableau p.7), et à condition que $\int_a^b u'(t).v(t)dt$ soit plus facile à calculer que $\int_a^b u(t).v'(t)dt$.

**3)** Exemples Calculer les intégrales suivantes :

Page 8 chapitre ~~5~~ 7

$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\cos(t)\,dt$ : aucune formule du tableau p.6 ne s'applique

IPP : $\int_a^b UV'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'V\,dt$

On pose : $\begin{cases} U = t \\ V' = \cos t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = \sin t \end{cases}$

$K = [t.\sin t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt$

$K = \frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{2} - 0 - [-\cos t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + (\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\cos 0}_{1})$.

$K = \frac{\pi}{2} - 1$.

Page 10 chapitre 7

$L(t) = \int (t^5 - 3t + 2).\ln(t)\,dt =$ aucune formule de la page 6 ne s'applique.

IPP

$$\int_a^b U.V'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'V\,dt$$

$$\frac{1}{6}t^5 \xrightarrow{\int} \frac{1}{6}\frac{t^6}{6}$$

On pose $\begin{cases} U = \ln t \\ V' = t^5 - 3t + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = \frac{1}{t} \\ V = \frac{t^6}{6} - 3\frac{t^2}{2} + 2t \end{cases}$

$$L(t) = \left(\frac{t^6}{6} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right).\ln t - \int \underbrace{\frac{1}{t}\left(\frac{t^6}{6} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right)}_{\to \frac{t^5}{6} - \frac{3t}{2} + 2}\,dt$$

$$L(t) = \left(\frac{t^6}{6} - \frac{3t^2}{2} + 2t\right).\ln t - \left(\frac{t^6}{36} - \frac{3t^2}{4} + 2t\right) + cte$$

## Notes

Page 9 chapitre 7

Moyen mnémotechnique pour choisir U dans la formule :

$$\int_a^b U.V'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'V\,dt$$

ALPES

arctan
arcsin
arccos
...

ln

polynômes

exp.

Sin, Cos, Sh, Ch

Expls : $\int \underbrace{t}_{P} . \underbrace{\cos t}_{S}\,dt$ ; $\int \underbrace{5t^2}_{P} . \underbrace{\ln t}_{L}\,dt$ ; $\int \underbrace{x}_{P} . \underbrace{\arctan x}_{A}\,dx$

$U = t$ ; $V' = \cos t$

$U = \ln t$ ; $V' = 5t^2$

$U = \arctan x$ ; $V' = x$

$J(t) = \int \ln(t)dt$ ……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

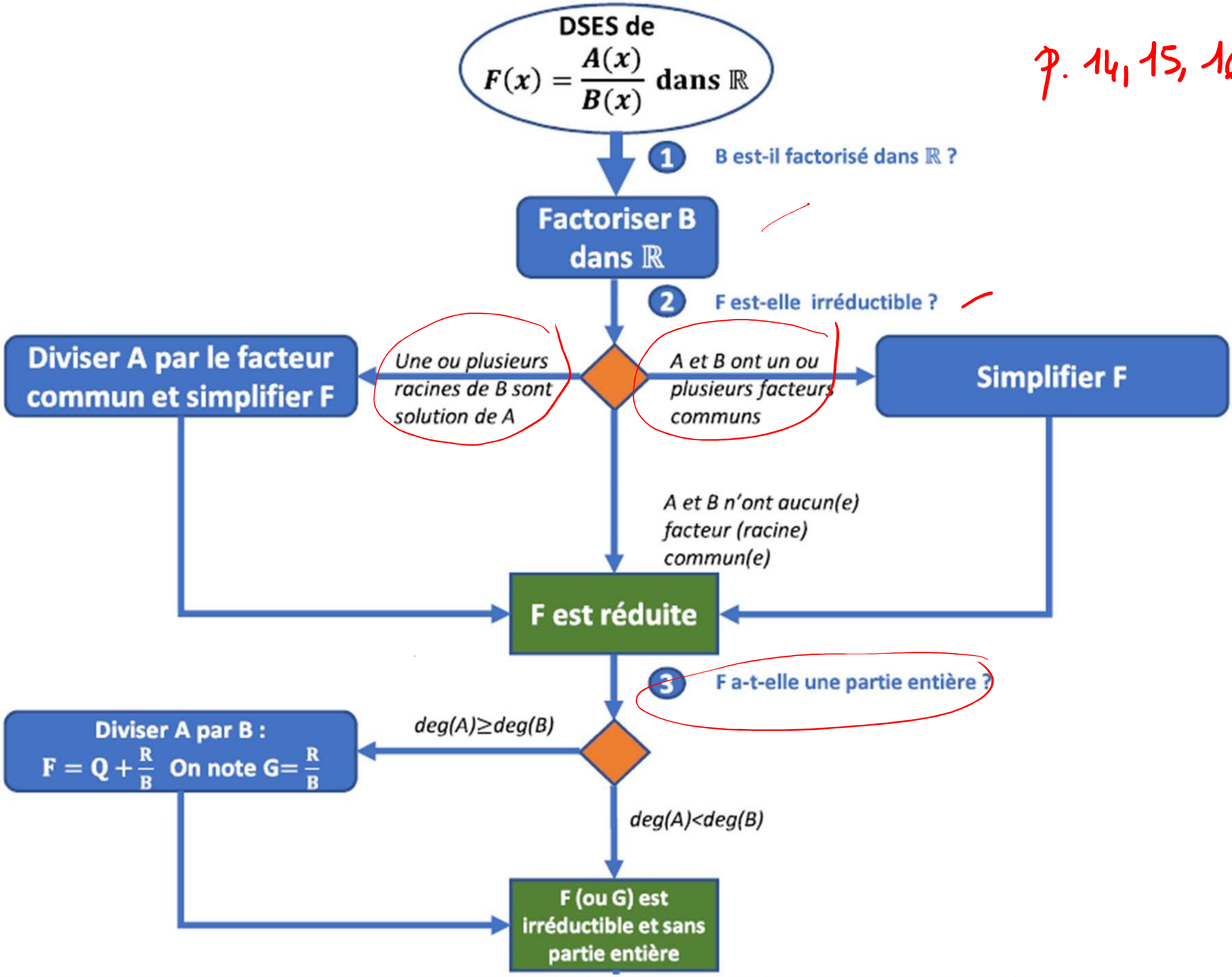
$K = \int_0^3 (x-3)^2 . e^{5x} dx$…………………………………………………………………………………………………………

Page 10 chapitre 7

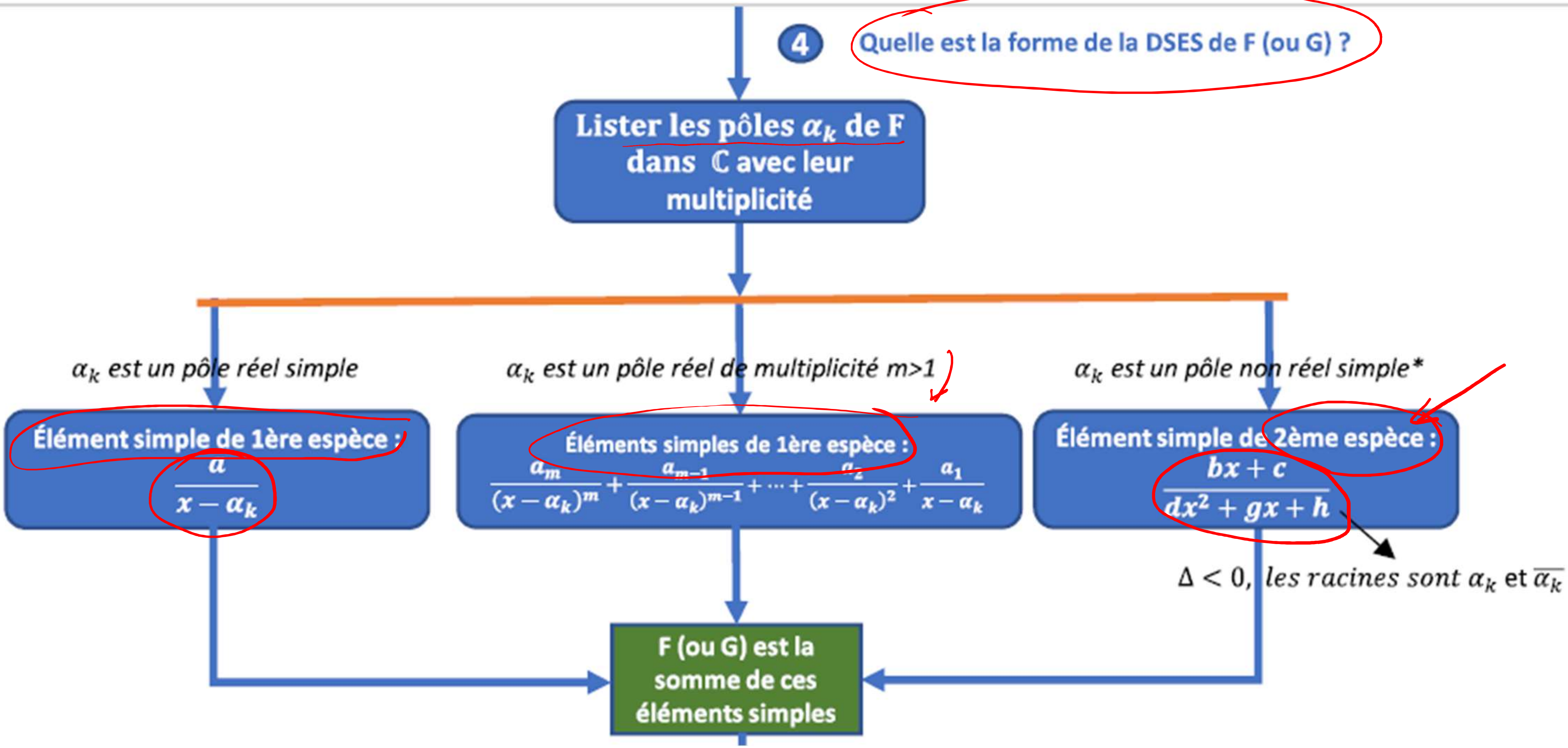
$K = \int_0^3 (x-3)^2 . e^{5x} dx$……………………………………………………………………………………

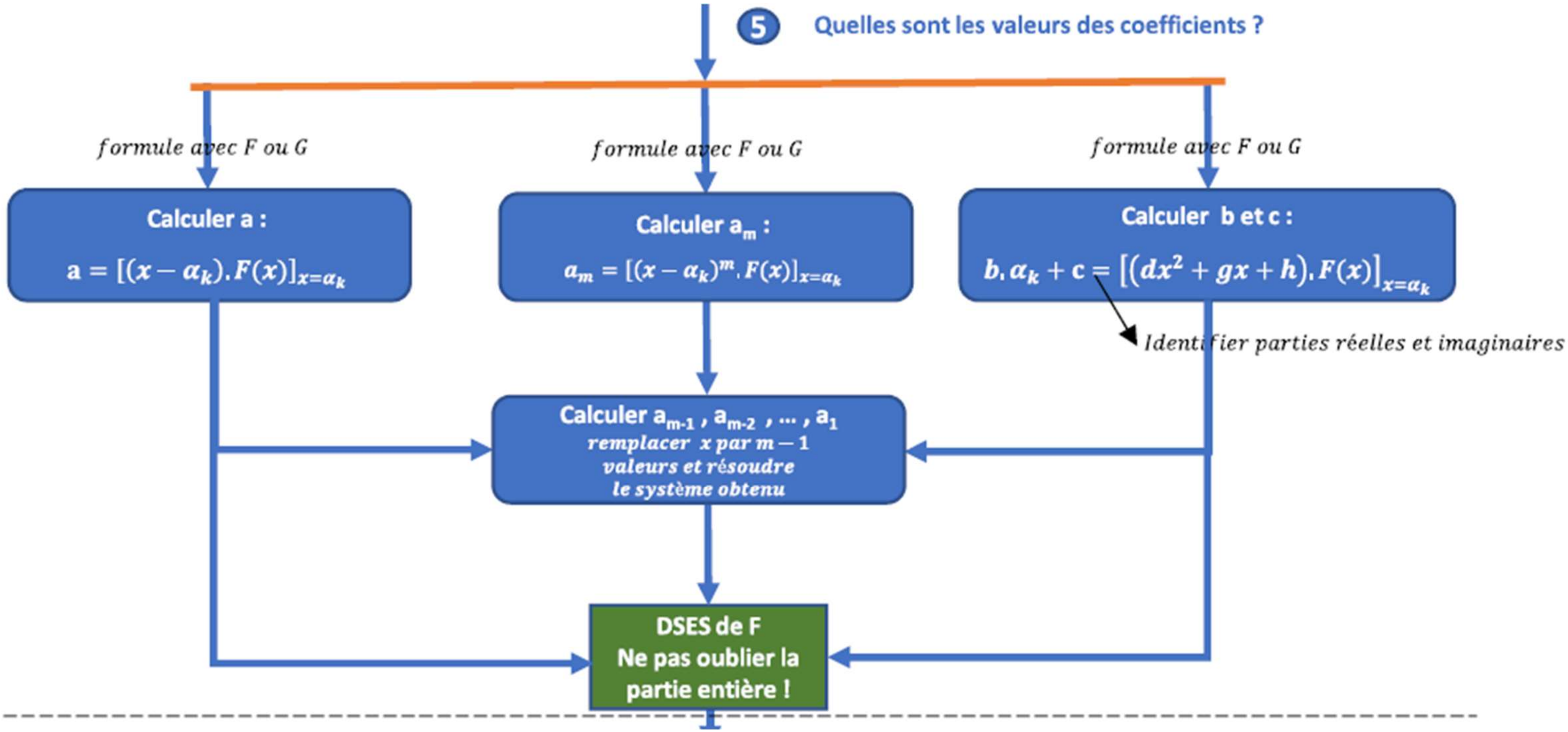
Page 10 chapitre 7

p. 14, 15, 16



DSES de $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ dans $\mathbb{R}$
1 B est-il factorisé dans $\mathbb{R}$ ?
Factoriser B dans $\mathbb{R}$
2 F est-elle irréductible ?
Diviser A par le facteur commun et simplifier F
Une ou plusieurs racines de B sont solution de A
A et B ont un ou plusieurs facteurs communs
Simplifier F
A et B n'ont aucun(e) facteur (racine) commun(e)
F est réduite
3 F a-t-elle une partie entière ?
Diviser A par B : $F = Q + \frac{R}{B}$ On note G= $\frac{R}{B}$
deg(A)≥deg(B)
deg(A)<deg(B)
F (ou G) est irréductible et sans partie entière


4
Quelle est la forme de la DSES de F (ou G) ?
Lister les pôles $\alpha_k$ de F dans $\mathbb{C}$ avec leur multiplicité
$\alpha_k$ est un pôle réel simple
$\alpha_k$ est un pôle réel de multiplicité m>1
$\alpha_k$ est un pôle non réel simple*
Élément simple de 1ère espèce : $\dfrac{a}{x-\alpha_k}$
Éléments simples de 1ère espèce : $\dfrac{a_m}{(x-\alpha_k)^m}+\dfrac{a_{m-1}}{(x-\alpha_k)^{m-1}}+\cdots+\dfrac{a_2}{(x-\alpha_k)^2}+\dfrac{a_1}{x-\alpha_k}$
Élément simple de 2ème espèce : $\dfrac{bx+c}{dx^2+gx+h}$
$\Delta < 0,$ $les\ racines\ sont\ \alpha_k$ et $\overline{\alpha_k}$
F (ou G) est la somme de ces éléments simples


5
Quelles sont les valeurs des coefficients ?
$formule\ avec\ F\ ou\ G$
$formule\ avec\ F\ ou\ G$
$formule\ avec\ F\ ou\ G$
Calculer a :
$a = [(x-\alpha_k).F(x)]_{x=\alpha_k}$
Calculer $a_m$ :
$a_m = [(x-\alpha_k)^m.F(x)]_{x=\alpha_k}$
Calculer b et c :
$b.\alpha_k + c = [(dx^2+gx+h).F(x)]_{x=\alpha_k}$
$Identifier\ parties\ réelles\ et\ imaginaires$
Calculer $a_{m-1}$ , $a_{m-2}$ , … , $a_1$
$remplacer\ x\ par\ m-1$
$valeurs\ et\ résoudre$
$le\ système\ obtenu$
DSES de F
Ne pas oublier la
partie entière !

# Notes

DSES (dans $\mathbb{R}$) $H(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)\cdot(\tau s+1)} = \dfrac{A(s)}{B(s)}$ et calculer $\mathcal{L}^{-1}(H(s))$ où $\tau \in \mathbb{R}$.

Page 13 chapitre 7

① On factorise dans $\mathbb{R}$ $B(s) = (s^2+1)(\tau s+1)$ c'est fait

On dit que $j$ ; $-j$ et $-\frac{1}{\tau}$ sont les pôles (racine $j$ et $-j$) simples de la fraction F.

② H est irréductible car A et B n'ont pas de facteur commun.

③ $\deg A = 0 < \deg B = 3$, F n'a donc pas de partie entière

④ $H(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)\cdot(\tau s+1)} = \dfrac{as+b}{s^2+1} + \dfrac{c}{\tau . s+1}$

$aj+b = \left[(s^2+1)\,H(s)\right]_{s=j} = \left[\dfrac{1}{\tau s+1}\right]_{s=j} = \dfrac{1}{\tau j+1}$

$aj+b = \dfrac{1}{\tau j+1} \times \dfrac{-\tau j+1}{-\tau j+1} = \dfrac{1-\tau j}{\tau^2+1} = \dfrac{1}{\tau^2+1} + j\dfrac{-\tau}{\tau^2+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{\tau}{\tau^2+1} \\ b = \dfrac{1}{\tau^2+1} \end{cases}$ $\qquad c = \dfrac{\tau^2}{\tau^2+1}$

Conclusion $H(s) = \dfrac{1}{\tau^2+1}\left(\dfrac{-\tau s+1}{s^2+1} + \dfrac{\tau^2}{\tau s+1}\right)$ $\quad \dfrac{\tau}{\tau(s+1/\tau)}$

$h(t) = \dfrac{1}{\tau^2+1}\left(-\tau\cos t + \sin t + \tau\, e^{-t/\tau}\right)$

# Notes

dans $\mathbb{R}$ Voir suite page 23 ou 28

DSES $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2(\tau s+1)}$ et calculer $\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$

Page ~~13~~ 23. chapitre 7

$\tau$ est réel. $\tau \neq 1$.

①②③

H est irréductible, sans partie entière. Les pôles de H sont : 0 qui est double, $-1/\tau$ " simple

④ $H(s) = \dfrac{s(s+1)}{s^2(\tau s+1)} = \dfrac{a s}{s^2} + \dfrac{b s}{s} + \dfrac{c s}{\tau s+1}$

Ex 4 p. 19 chap 7

$a = \left[s^2 \cdot H(s)\right]_{s=0} = \left[\dfrac{s+1}{\tau s+1}\right]_{s=0} = 1.$

~~$b = \left[s H(s)\right]_{s=0} = \left[\dfrac{s+1}{s(\tau s+1)}\right]_{s=0}$~~ division par zéro. calcul de b en dernier

$c = \left[(\tau s+1) H(s)\right]_{s=-1/\tau} = \left[\dfrac{s+1}{s^2}\right]_{s=-1/\tau} = \dfrac{-\frac{1}{\tau}+1}{(-1/\tau)^2} = \dfrac{\frac{-1+\tau}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2}} = \dfrac{-1+\tau}{\tau} \times \dfrac{\tau^2}{1} = \underline{\underline{\tau(\tau-1)}}$

Calcul de b soit on remplace s par une valeur : ~~0~~ 1 ou −1

Soit $\boxed{\lim\limits_{s\to+\infty} s \cdot H(s)} = \lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{s^2}{\tau s^3} = \lim\limits_{s\to+\infty} \left(\dfrac{a s}{s^2} + \dfrac{b s}{s} + \dfrac{c s}{\tau s}\right)$

$0 = 0 + b + \dfrac{c}{\tau} \Leftrightarrow b = \dfrac{-c}{\tau} = \dfrac{-\tau(\tau-1)}{\tau}$

$b = 1-\tau$

Conclusion $H(s) = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1-\tau}{s} + \dfrac{\tau(\tau-1)}{\tau s+1}$

$$U(x)=\int \frac{x^4}{x^4+2x^3-2x-1}dx \ ; \quad V(t)=\int (t^3+2t+3).\ln(t).dt \ ; \quad I=\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\sin^3(x).dx$$

Page 19 chapitre 7

Ex4 - p.19 - chap7

- $I=\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2 x \cdot \sin^3 x}_{f(x)}\,dx =$

$x \mapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ sont $2\pi$-périodique, donc $f$ est $2\pi$-périodique

Cos est paire alors $\cos^2$ est paire
Sin est impaire alors $\sin^3$ est impaire
} $f$ est impaire.

$f$ est $2\pi$-périodique alors $I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$ car $f$ est impaire.

- $V(t)=\int \overbrace{(t^3+2t+3)}^{P}\cdot \overbrace{\ln t}^{L}\,dt = \left(\frac{t^4}{4}+t^2+3t\right)\cdot \ln t - \int \left(\frac{t^3}{4}+t+3\right)dt$

IPP: $\int_a^b U V'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$

$\begin{cases} U=\ln t \\ V'=t^3+2t+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'=\frac{1}{t} \\ V=\frac{t^4}{4}+t^2+3t \end{cases}$

$V(t)=\left(\frac{t^4}{4}+t^2+3t\right)\cdot \ln t - \left(\frac{t^4}{16}+\frac{t^2}{2}+3t\right)+ c^{te}$
$\forall t>0$

**Exercice 4** Calculer les intégrales suivantes :

Page 19 chapitre 7

$$K(x) = \int (1+\tan^2(x)).\tan^3(x).dx \ ; \ L(x) = \int \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}.dx \ ; \ M(x) = \int x^2 e^{3x}.dx \ ; \ N = \int_0^1 \frac{dt}{e^{-t}+1} \ ;$$

$$N = \int_0^1 \frac{dt}{e^{-t}+1} = \qquad \int \frac{u'}{u}dt = \ln|u| + cte$$

$$f(t) = \frac{1}{e^{-t}+1} = \frac{1}{\frac{1}{e^t}+1} = \frac{1}{\frac{1+e^t}{e^t}} = \frac{e^t}{1+e^t} = \frac{u'}{u} \text{ oui !}$$

$$N = \left[\ln(1+e^t)\right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$e = e^1 \qquad 2 = 2^1$$

$P = \int_{1}^{3} \frac{x}{x^4+1} dx$ ; $Q = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).\sin^5(x).dx$ ; $T(x) = \int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ ;

Page 19 chapitre 7

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................

..........................................................................................................................................................