BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R2-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Test N°2 – Sujet 1

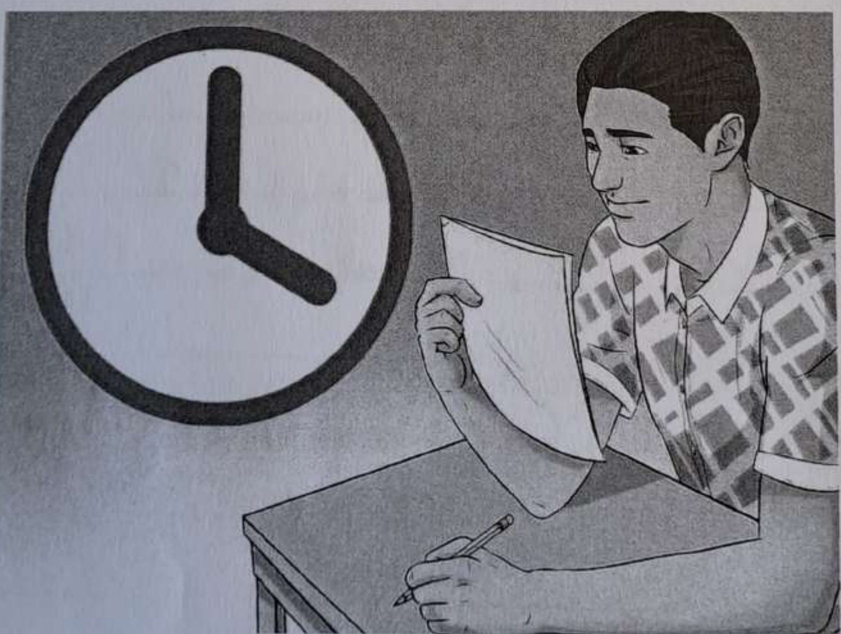
Durée : 30 min. **Calculatrice : Collège** **Documents : aucun**

Instructions : Répondre sur le sujet - Le barème est approximatif
Soigner la présentation et la rédaction (2points)
1) 6 pts 2) 3 pts 3) 2 pts 4) 4 pts 5) 3 pts

Nom : ……………………………………………………………

Prénom : ……………………………………………………….

Groupe : ……………………………………………………….



Soit $F(x) = \frac{4x^5+8x^4-9x^3-32x^2-24x-5}{2x^4+3x^3-6x^2-13x-6} = \frac{A(x)}{B(x)}$ une fraction rationnelle, le but de ce problème est de déterminer les primitives de F. Pour cela, il vous faudra la décomposer en somme d'éléments simples en suivant les étapes suivantes :

1) Montrer que -1 est une racine multiple de B, le dénominateur de F, puis factoriser ce dernier.

$B(-1) = 2-3-6+13-6 = -15+15 = 0$

$B'(x) = 8x^3+9x^2-12x-13 \Rightarrow B'(-1) = -8+9+12-13 = 21-21=0$

$B''(x) = 24x^2+18x-12 \Rightarrow B''(-1) = 24-18-12 \neq 0$

-1 est donc racine double de B, et B est factorisable par

$(x+1)^2 = x^2+2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+3x^3-6x^2-13x-6 & x^2+2x+1 \\
\cline{2-2}
-(2x^4+4x^3+2x^2) & 2x^2-x-6 \\
\cline{1-1}
-x^3-8x^2-13x-6 & \\
-(-x^3-2x^2-x) & \\
\cline{1-1}
-6x^2-12x-6 & \\
-(-6x^2-12x-6) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc $B(x) = (x+1)^2(2x^2-x-6)$

On résout $2x^2-x-6=0$

$\Delta = 1+4\times2\times6 = 1+48 = 49$

$x_1 = \frac{1+7}{4} = 2$ et $x_2 = \frac{1-7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

Ainsi

$B(x) = 2(x+1)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2) = (x+1)^2(2x+3)(x-2)$

est factorisé dans R et C

2) Montrer que F a une partie entière, la calculer, puis noter G la fraction restante.

> **Soit $F = \frac{A}{B}$, une fraction irréductible. Deux cas de figure se présentent :**
>
> **- Soit <u>deg(A) ≥ deg(B)</u>, on peut alors effectuer la division euclidienne de A par B. On obtient donc les polynômes Q et R tels que :**
>
> $$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{ et } F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$
>
> **Q est appelé <u>partie entière</u> de F.**
>
> **- Soit deg(A)<deg(B), on ne peut alors pas effectuer de division euclidienne de A par B, et F ne possède pas de partie entière.**

deg A = 5 ≥ deg B = 4 , F a donc une partie entière

$$\begin{array}{r|l} 4x^5+8x^4-9x^3-32x^2-24x-5 & 2x^4+3x^3-6x^2-13x-6 \\ \hline -(4x^5+6x^4-12x^3-26x^2-12x) & 2x+1 \\ 2x^4+3x^3-6x^2-12x-5 & \\ -(2x^4+3x^3-6x^2-13x-6) & \\ x+1 & \end{array}$$

donc $F(x) = \underbrace{2x+1}_{\text{partie entière}} + \frac{x+1}{(x+1)^2(2x+3)(x-2)} = G(x)$

3) Réduire la fraction G obtenue dans la question précédente.

$G(x) = \frac{x+1}{(x+1)^2(2x+3)(x-2)} = \frac{1}{(x+1)(2x+3)(x-2)}$

4) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de la fraction irréductible et sans partie entière Z, définie par : $\mathbf{Z(x)} = \frac{1}{(x-2)(x+1)(2x+3)}$, puis calculer les coefficients.

$$Z(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)(2x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+3}$$

$$a = \left[(x-2)Z(x)\right]_{x=2} = \left[\frac{1}{(x+1)(2x+3)}\right]_{x=2} = \frac{1}{3\times 7} = \frac{1}{21}$$

$$b = \left[(x+1)Z(x)\right]_{x=-1} = \left[\frac{1}{(x-2)(2x+3)}\right]_{x=-1} = \frac{1}{(-3)(1)} = -\frac{1}{3}$$

$$c = \left[(2x+3)Z(x)\right]_{x=-3/2} = \left[\frac{1}{(x-2)(x+1)}\right]_{x=-3/2} = \frac{1}{-\frac{7}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{7}$$

Ainsi :

$$Z(x) = \frac{1}{21}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1} + \frac{4}{7}\,\frac{1}{2x+3}$$

5) Déduire des résultats obtenus dans les questions précédentes, la décomposition en somme d'éléments simples de F, puis déterminer ses primitives.

On remarque que $G(x) = Z(x)$, et on obtient :

$$F(x) = 2x + 1 + \frac{1}{21}\,\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1} + \frac{4}{7}\,\frac{1}{2x+3}$$

$$\int F(x)\,dx = x^2 + x + \frac{1}{21}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{7}\ln|2x+3| + cte$$

BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R2-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Test N°2 – Sujet 2

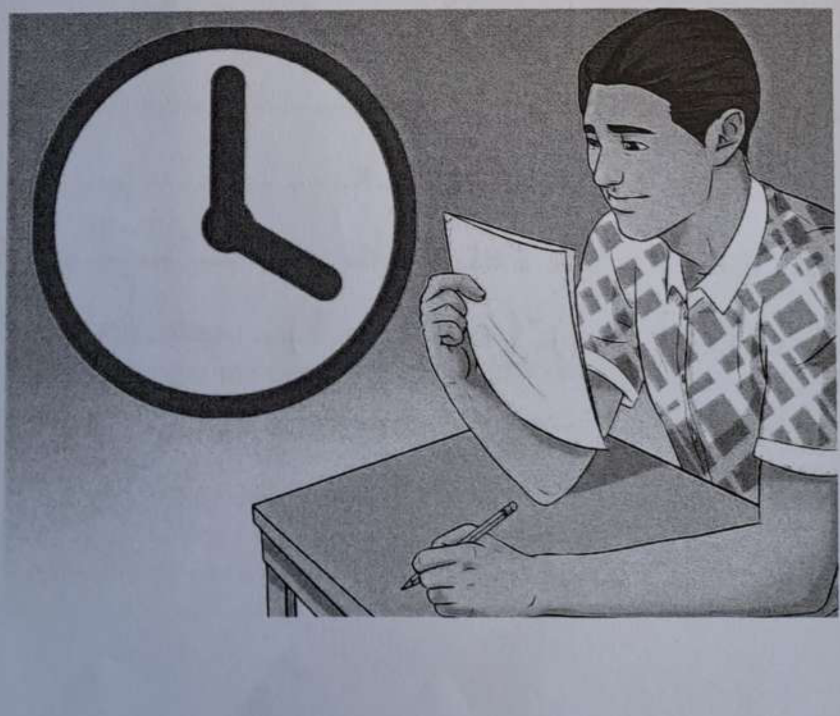
Durée : 30 min. Calculatrice : Collège Documents : aucun

Instructions : Répondre sur le sujet - Le barème est approximatif
Soigner la présentation et la rédaction (2points)
1) 6 pts 2) 3 pts 3) 2 pts 4) 4 pts 5) 3 pts

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ....



Soit $F(x) = \dfrac{x^5-x^4-9x^3+14x^2+8x-16}{x^4-2x^3-7x^2+20x-12} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ une fraction rationnelle, le but de ce problème est de déterminer les primitives de F. Pour cela, il vous faudra la décomposer en somme d'éléments simples en suivant les étapes suivantes :

1) Montrer que 2 est une racine multiple de B, le dénominateur de F, puis factoriser ce dernier.

$B(2) = 2^4 - 2^4 - 7\times 4 + 40 - 12 = -28 + 40 - 12 = -40 + 40 = 0$

$B'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 14x + 20 \Rightarrow B'(2) = 4\times 8 - 24 - 28 + 20 = 52 - 52 = 0$

$B''(x) = 12x^2 - 12x - 14 \Rightarrow B''(2) \neq 0$

2 est donc racine double de B, et B est factorisable par

$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 & x^2 - 4x + 4 \\
\cline{2-2}
-(x^4 - 4x^3 + 4x^2) & x^2 + 2x - 3 \\
\cline{1-1}
\quad 2x^3 - 11x^2 + 20x - 12 & \\
\quad -(2x^3 - 8x^2 + 8x) & \\
\cline{1-1}
\qquad -3x^2 + 12x - 12 & \\
\qquad -(-3x^2 + 12x - 12) & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Donc $B(x) = (x-2)^2(x^2 + 2x - 3)$

On résout $x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-3) = 16$

$x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$

Alors $B(x) = (x-2)^2(x-1)(x+3)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

2) Montrer que F a une partie entière, la calculer, puis noter G la fraction restante.

Soit $F = \dfrac{A}{B}$, une fraction irréductible. Deux cas de figure se présentent :

- Soit <u>deg(A) ≥ deg(B)</u>, on peut alors effectuer la division euclidienne de A par B. On obtient donc les polynômes Q et R tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{ et } F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Q est appelé <u>partie entière</u> de F.

- Soit deg(A)<deg(B), on ne peut alors pas effectuer de division euclidienne de A par B, et F ne possède pas de partie entière.

$\deg A = 5 \geq \deg B = 4$, F a donc une partie entière

$$\begin{array}{r|l} x^5 - x^4 - 9x^3 + 14x^2 + 8x - 16 & x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 \\ \hline -(x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 20x^2 - 12x) & x + 1 \\ \hline x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 20x - 16 & \\ -(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12) & \\ \hline x^2 - 4 & \end{array}$$

$= G(x)$

Donc $F(x) = \underbrace{x + 1}_{\text{partie entière}} + \dfrac{x^2 - 4}{(x-2)^2(x-1)(x+3)}$

3) Réduire la fraction G obtenue dans la question précédente.

$G(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x-1)(x+3)} = \dfrac{x+2}{(x-2)(x-1)(x+3)}$

4) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de la fraction irréductible et sans partie entière Z, définie par : $\mathbf{Z(x)} = \frac{\mathbf{x+2}}{\mathbf{(x-2)(x-1)(x+3)}}$, puis calculer les coefficients.

$$Z(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+3}$$

$$a = \left[(x-2)\, Z(x)\right]_{x=2} = \left[\frac{x+2}{(x-1)(x+3)}\right]_{x=2} = \frac{4}{5}$$

$$b = \left[(x-1)\, Z(x)\right]_{x=1} = \left[\frac{x+2}{(x-2)(x+3)}\right]_{x=1} = \frac{3}{(-1)(4)} = -\frac{3}{4}$$

$$c = \left[(x+3)\, Z(x)\right]_{x=-3} = \left[\frac{x+2}{(x-2)(x-1)}\right]_{x=-3} = \frac{-1}{(-5)(-4)} = \frac{-1}{20}$$

Ainsi $Z(x) = \frac{4}{5}\frac{1}{x-2} - \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{20}\frac{1}{x+3}$

5) Déduire des résultats obtenus dans les questions précédentes, la décomposition en somme d'éléments simples de F, puis déterminer ses primitives.

Comme $G(x) = Z(x)$, alors la DSES de F est :

$$F(x) = x+1 + \frac{4}{5}\frac{1}{x-2} - \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{20}\frac{1}{x+3}$$

et :

$$\int F(x)\, dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{4}{5}\ln|x-2| - \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{-1}{20}\ln|x+3| + cte$$

BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R2-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Test N°2 – Sujet 3

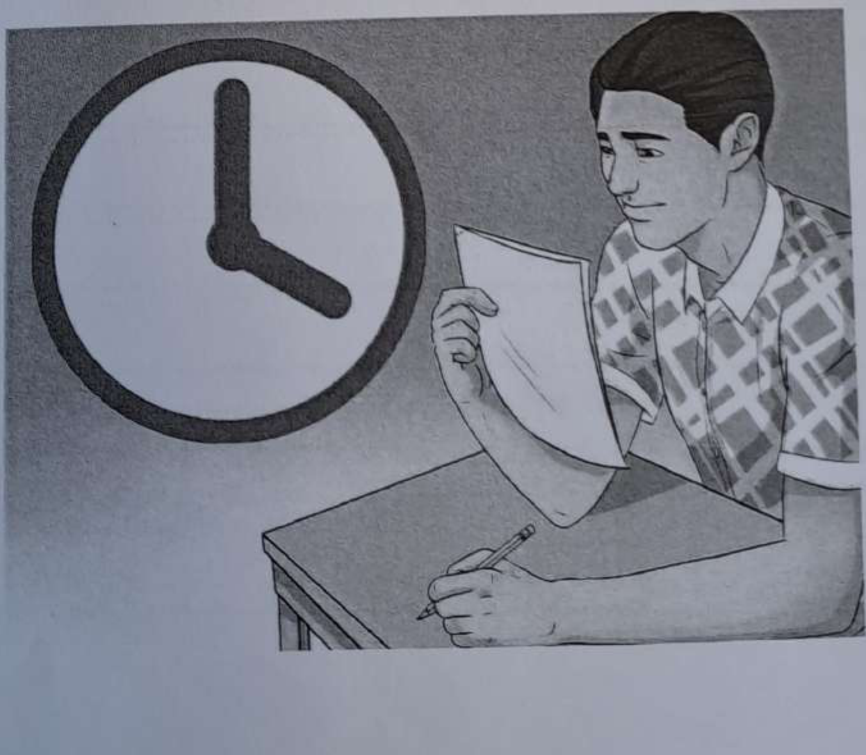
Durée : 30 min. **Calculatrice : Collège** **Documents : aucun**

Instructions : Répondre sur le sujet - Le barème est approximatif
Soigner la présentation et la rédaction (2points)
1) 6 pts 2) 3 pts 3) 2 pts 4) 4 pts 5) 3 pts

Nom : ....

Prénom : ....

Groupe : ....



Soit $F(x) = \frac{x^5-4x^4-4x^3+23x^2+3x-27}{x^4-3x^3-7x^2+15x+18} = \frac{A(x)}{B(x)}$ une fraction rationnelle, le but de ce problème est de déterminer les primitives de F. Pour cela, il vous faudra la décomposer en somme d'éléments simples en suivant les étapes suivantes :

6

1) Montrer que 3 est racine multiple de B, le dénominateur de F, puis factoriser ce dernier.

$B(3) = 81 - 3\times 27 - 7\times 9 + 15\times 3 + 18 = 0$

$B'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 14x + 15 \Rightarrow B'(3) = 4\times 27 - 81 - 14\times 3 + 15 = 0$

$B''(x) = 12x^2 - 18x - 14 \Rightarrow B''(3) = 12\times 9 - 18\times 3 - 14 \neq 0$

3 est donc racine double de B, et B est factorisable par

$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 & x^2 - 6x + 9 \\ \hline
-(x^4 - 6x^3 + 9x^2) & x^2 + 3x + 2 \\ \hline
3x^3 - 16x^2 + 15x + 18 & \\
-(3x^3 - 18x^2 + 27x) & \\ \hline
2x^2 - 12x + 18 & \\
-(2x^2 - 12x + 18) & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

Donc $B(x) = (x-3)^2(x^2+3x+2)$

On résout $x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$

$B(x) = (x-3)^2(x+1)(x+2)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

(3) **2)** Montrer que F a une partie entière, la calculer, puis noter G la fraction restante.

Soit $F = \dfrac{A}{B}$, une fraction irréductible. Deux cas de figure se présentent :

- Soit <u>deg(A) ≥ deg(B)</u>, on peut alors effectuer la division euclidienne de A par B. On obtient donc les polynômes Q et R tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{ et } F = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Q est appelé <u>partie entière</u> de F.

- Soit deg(A)<deg(B), on ne peut alors pas effectuer de division euclidienne de A par B, et F ne possède pas de partie entière.

deg A = 5 ≥ deg B = 4, F a donc une partie entière

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 4x^4 - 4x^3 + 23x^2 + 3x - 27 & x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 \\ \hline -(x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 15x^2 + 18x) & x - 1 \\ -x^4 + 3x^3 + 8x^2 - 15x - 27 & \\ -(-x^4 + 3x^3 + 7x^2 - 15x - 18) & \\ x^2 - 9 & \end{array}$$

Ainsi $F(x) = \underbrace{x - 1}_{\text{partie entière}} + \dfrac{x^2 - 9}{(x-3)^2(x+1)(x+2)} = G(x)$

(2) **3)** Réduire la fraction G obtenue dans la question précédente.

$$G(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+1)(x+2)} = \frac{x+3}{(x-3)(x+1)(x+2)}$$

4

4) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples de la fraction irréductible et sans partie entière Z, définie par : $\mathbf{Z(x)} = \frac{\mathbf{x+3}}{\mathbf{(x+2)(x+1)(x-3)}}$, puis calculer les coefficients.

$$Z(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$$

$$a = \Big[(x+2)Z(x)\Big]_{x=-2} = \left[\frac{x+3}{(x+1)(x-3)}\right]_{x=-2} = \frac{1}{(-1)(-5)} = \frac{1}{5}$$

$$b = \Big[(x+1)Z(x)\Big]_{x=-1} = \left[\frac{x+3}{(x+2)(x-3)}\right]_{x=-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$c = \Big[(x-3)\,G(x)\Big]_{x=3} = \left[\frac{x+3}{(x+2)(x+1)}\right]_{x=3} = \frac{6}{5\times 4} = \frac{3}{10}$$

Conclusion :

$$Z(x) = \frac{1}{5}\,\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{3}{10}\,\frac{1}{x-3}$$

3

5) Déduire des résultats obtenus dans les questions précédentes, la décomposition en somme d'éléments simples de F, puis déterminer ses primitives.

On remarque que $G(x) = Z(x)$

la DSES de F est donc :

$$F(x) = x - 1 + \frac{1}{5}\,\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{3}{10}\,\frac{1}{x-3}$$

$$\int F(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{10}\ln|x-3| + cte$$