SUITE COURS Transformation de Fourier

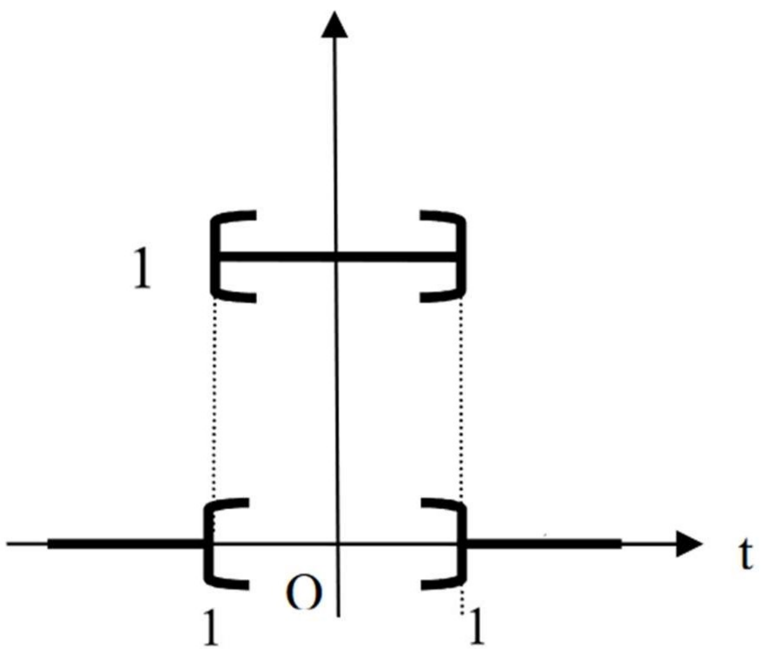
On obtient donc : $\boxed{\mathbf{T_F(rect(t)) = sinc(f)}}$

On a vu

Page 10 chapitre 4

<u>Espace temporel</u>

$\mathrm{rect}(t)$



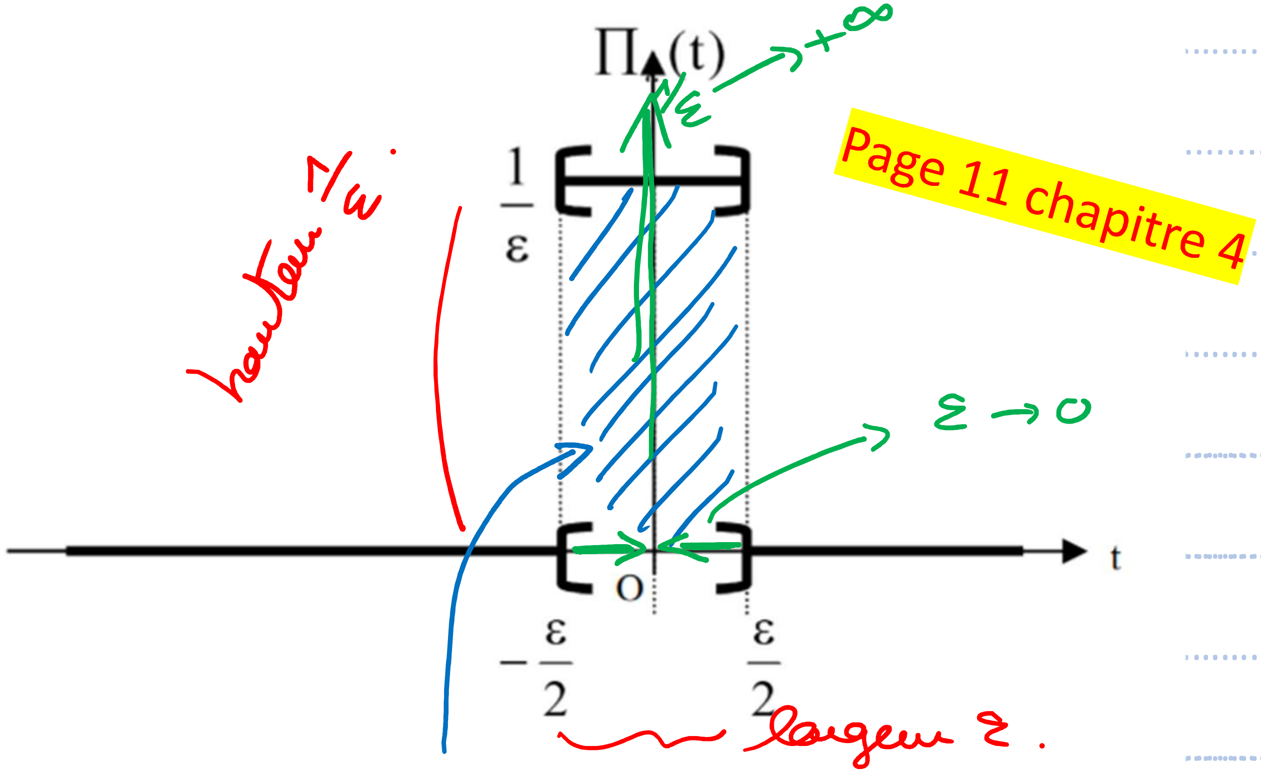
<u>Espace fréquentiel</u>

Spectre d'amplitude

$|X(f)|$

2) Porte de largeur ε

$$\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } |t| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



On remarque que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(t)dt = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \Pi_\varepsilon(t)dt = \frac{1}{\varepsilon} \times \varepsilon = 1$

<u>Impulsion de Dirac</u> $\delta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon(t)$ où $\varepsilon > 0$ et $\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & \text{si } |t| \le \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

comme pour Laplace et la transformée en Z on a :

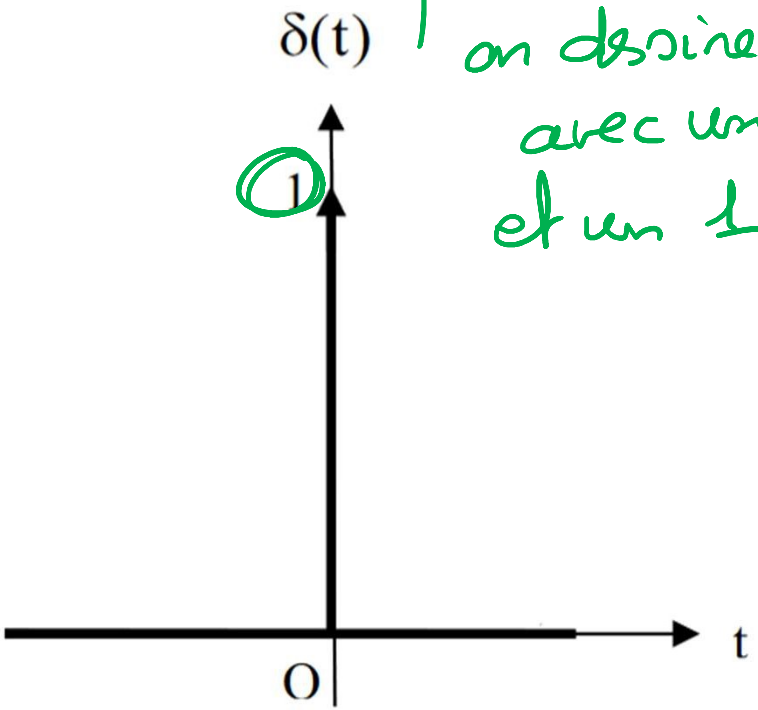
$$\boxed{T_F[\delta(t)] = 1}$$

$$T_L[\delta(t)] = 1$$

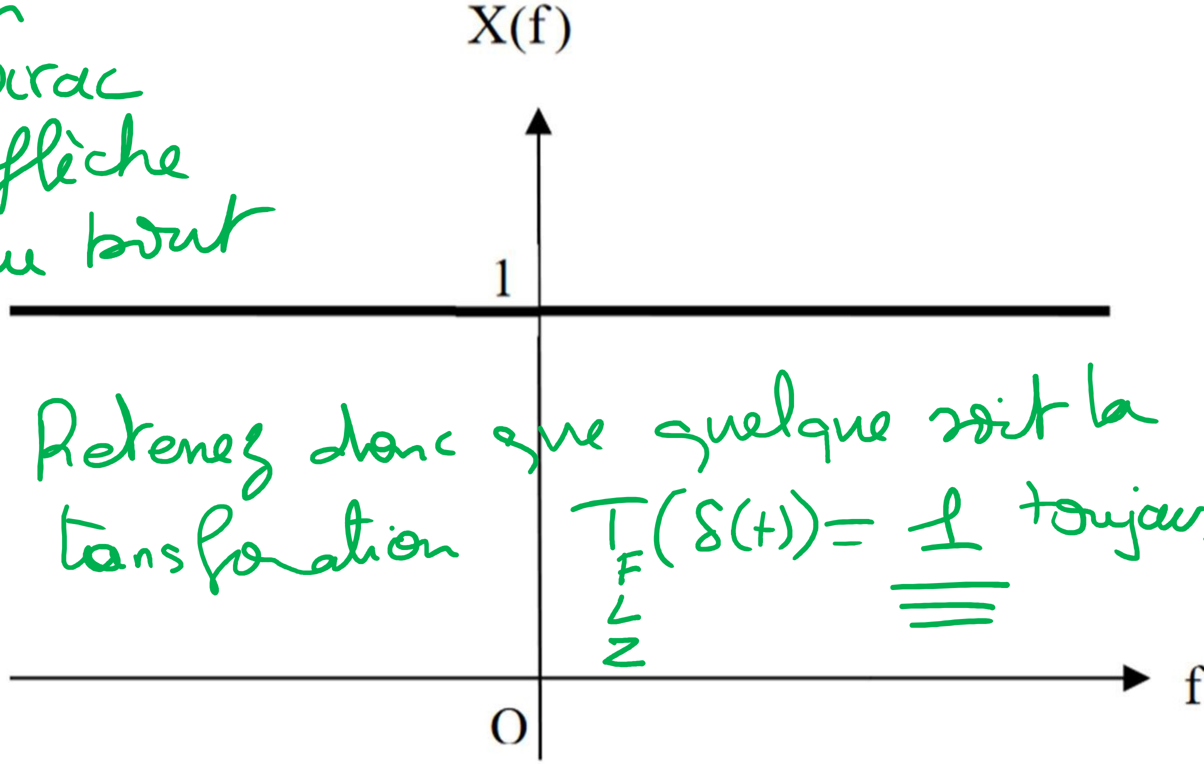
$$T_Z[\delta(k)] = 1$$

Espace temporel

Par convention on dessine Dirac avec une flèche et un 1 au bout



Espace fréquentiel

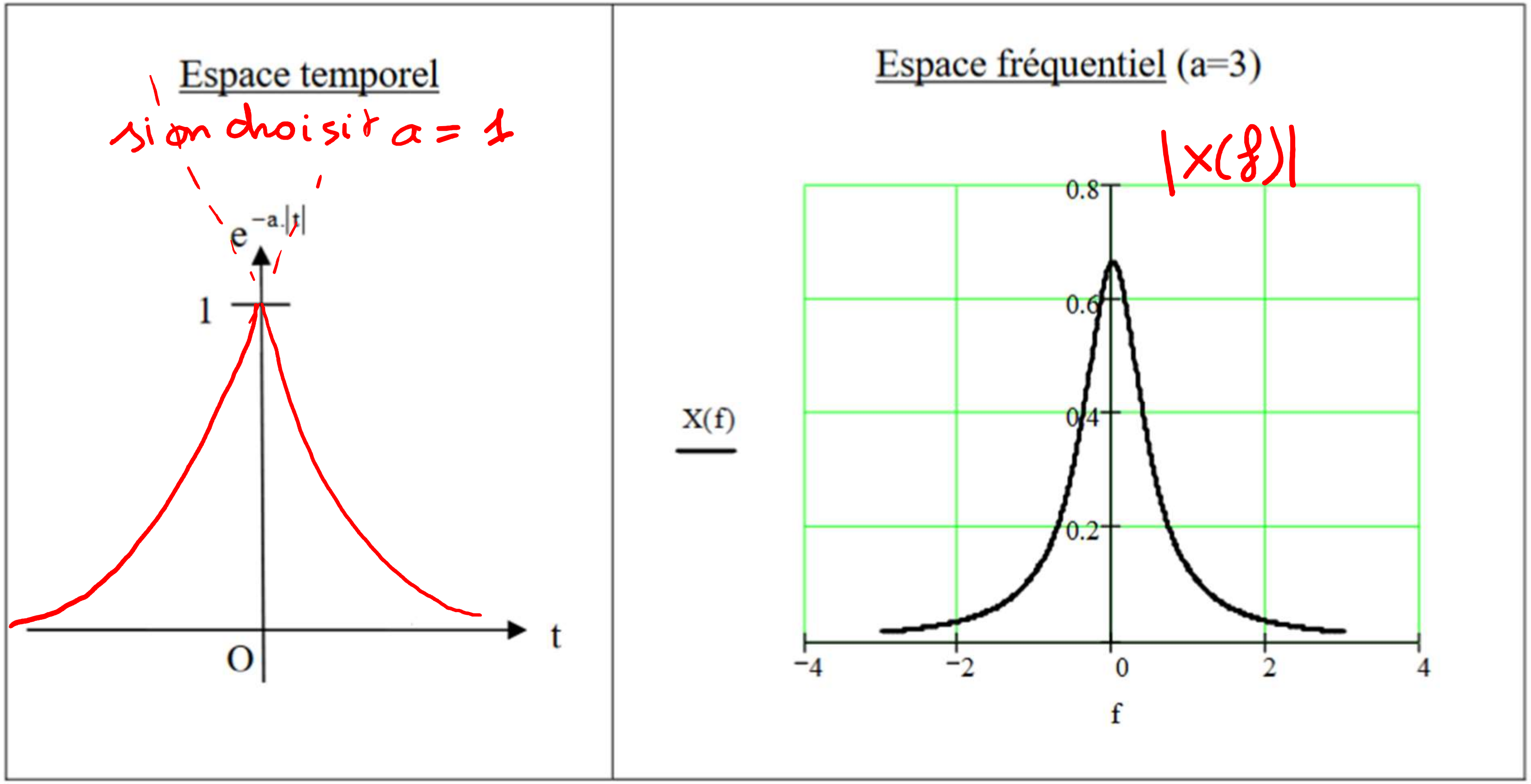


Retenez donc que quelque soit la transformation $T_{F/L/Z}(\delta(t)) = \underline{\underline{1}}$ toujours.

4) Signal exponentiel symétrique $\mathbf{x(t) = e^{-a.|t|}}$ **où a>0.**

Page 13 chapitre 4

$$T_F\left[e^{-a.|t|}\right] = \frac{2.a}{a^2 + (2.\pi.f)^2}$$

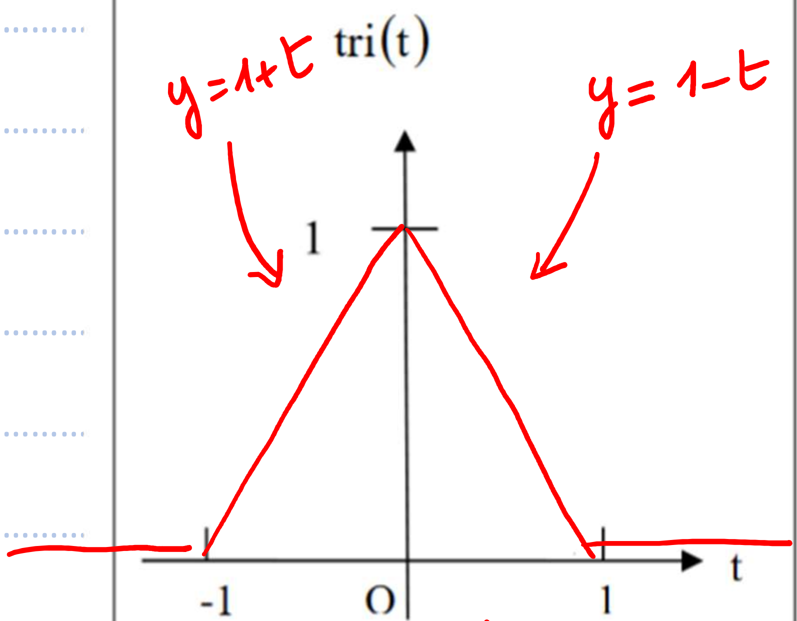
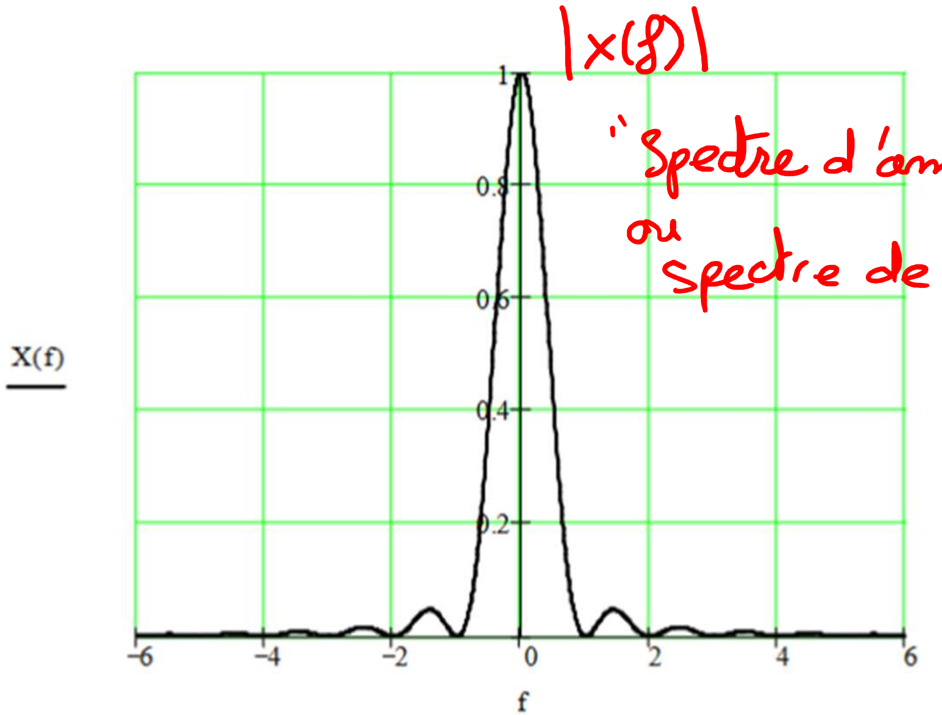


5) Signal fenêtre triangulaire $\mathbf{tri}(t) = \begin{cases} 1-|t| \text{ si } |t| \le 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $= \begin{cases} 1-t \text{ si } 0 \le t \le 1 \\ 1+t \text{ si } -1 \le t \le 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

$X(f) = \boxed{T_F[\mathrm{tri}(t)] = \sin^2 c(f)} = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2$ si $f \neq 0$

sinus cardinal au carré

Page 14 chapitre 4

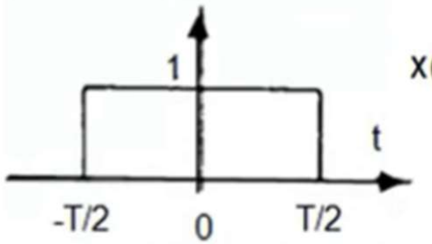
Espace temporel	Espace fréquentiel
	

"Spectre d'amplitude" ou "spectre de fréquence"

c'est donc un triangle!

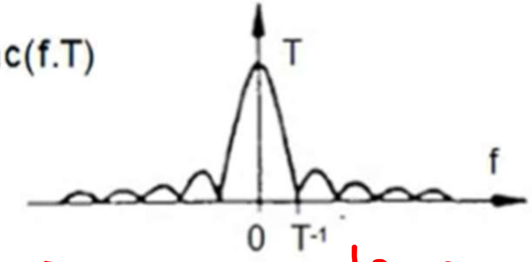
Pour résumer

autre notations avec d'autres profs -



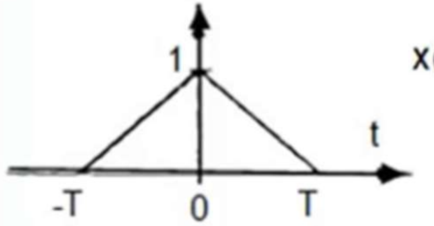
$x(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{T})$

$$X(j.f) = T.\frac{\sin(\pi.f.T)}{\pi.f.T} = T.\mathrm{sinc}(f.T)$$



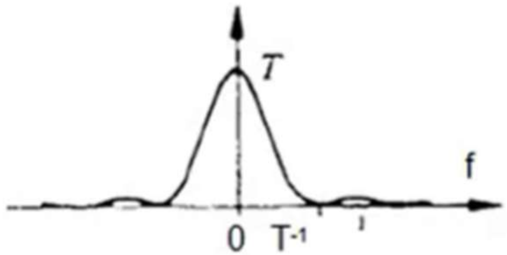
Impulsion rectangulaire

c'est plus compliqué...
sait-on jamais, si vous les voyez.

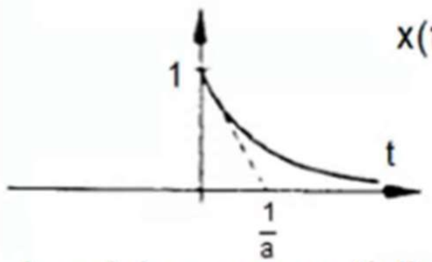


$x(t) = \mathrm{tri}(\frac{t}{T})$

$$X(j.f) = T.\mathrm{sinc}^2(f.T)$$

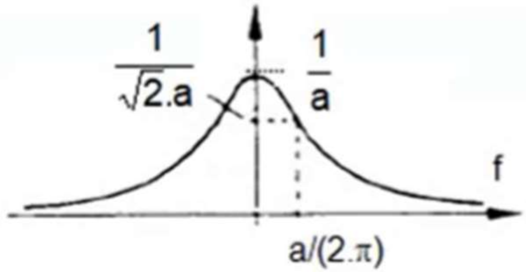


Impulsion triangulaire



$x(t) = e^{-a.t}.\epsilon(t)$

$$X(j.f) = \frac{1}{a + j.2.\pi.f}$$



Impulsion exponentielle

Comme pour les autres transformations (Laplace, Z) il y a des propriétés ... les mêmes !

C'est trop facile !!!!

Page 14 chapitre 4

III. Propriétés de la transformation de Fourier

1) Linéarité

C'est parti !

Si $X_1 = T_F[x_1]$ et $X_2 = T_F[x_2]$, alors $\boxed{T_F[\lambda x_1 + \mu x_2] = \lambda\ T_F[x_1] + \mu\ T_F[x_2] = \lambda .X_1 + \mu .X_2}$

(λ, μ sont des nombres complexes).

✓ Exemple : $T_F[3\text{tri}(t) + 1\,\text{rect}(t)] = 3 \cdot T_F(\text{tri}(t)) + T_F(\text{rect}(t))$

$= 3 \times \text{sinc}^2(f) + \text{sinc}(f)$

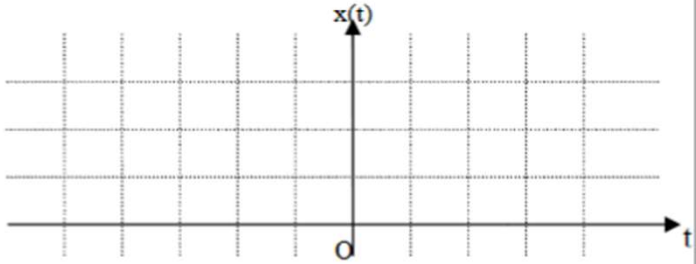
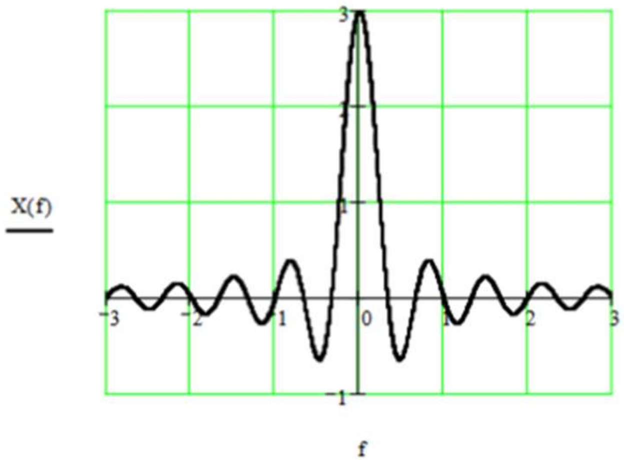
$X(f) = \text{sinc}(f)\,(3\,\text{sinc}(f) + 1)$ facile, non ?!

2) Transformée de Fourier de x(a.t) (Homothétie)

Page 15 chapitre 4

$$\boxed{T_F\,[x(a.t)]=\frac{1}{|a|}.X\left(\frac{f}{a}\right) \text{ où } X(f)=\ T_F\,[x(t)].}$$

Exemples

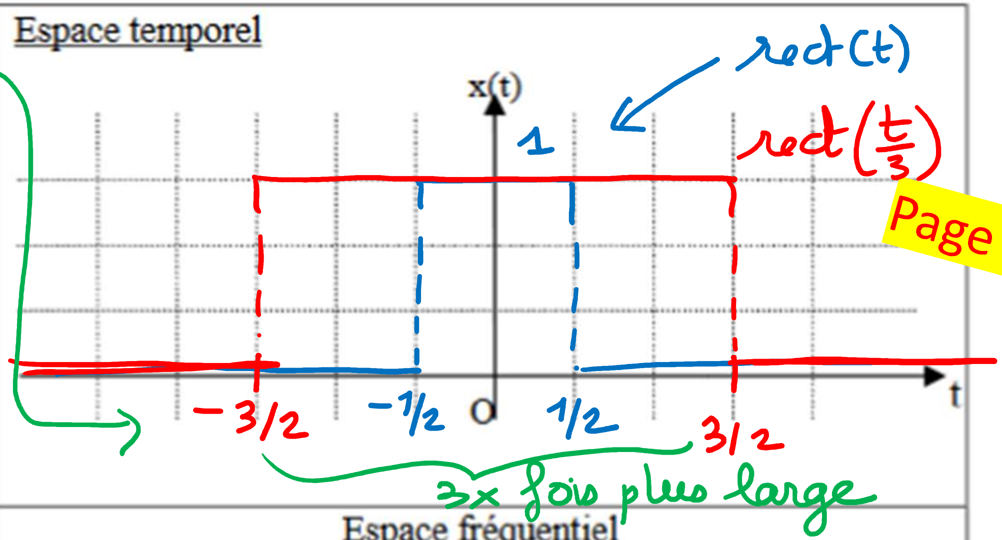
x(t)=rect(t/3) …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… ……………………………………………	Espace temporel 
…………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… …………………………………………… ……………………………………………	Espace fréquentiel 

Exple

x(t)=rect(t/3) $= \mathrm{rect}\left(\frac{1}{3}\cdot t\right)$

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases} \quad -\frac{3}{2} \le t \le \frac{3}{2}$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underbrace{-\frac{1}{2} \le \frac{t}{3} \le \frac{1}{2}} \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

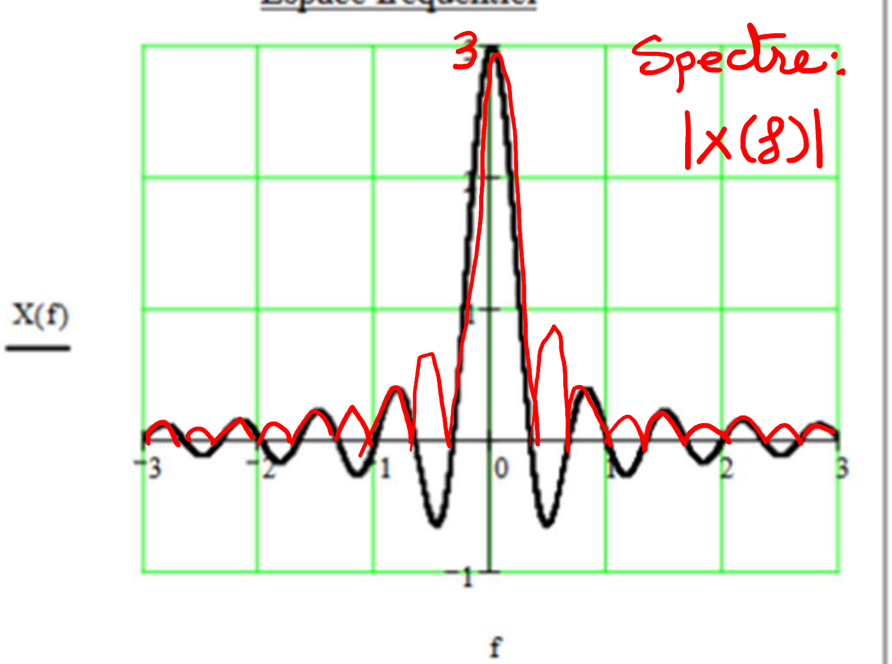


Page 15 chapitre 4

$$Y(f) = T_F\left(\mathrm{rect}\left(\frac{t}{3}\right)\right) \quad a = \frac{1}{3}$$

$$= 3 \cdot X(3f) \text{ où}$$

$$X(f) = T_F(\mathrm{rect}(t)) = \mathrm{sinc}(f).$$



Donc

$$Y(f) = 3 \cdot X(3f)$$

$$Y(f) = 3 \cdot \mathrm{sinc}(3f)$$

retardé ou avancé : on va voir la ≠ce dans les exemples.

3) Transformée de Fourier d'un signal décalé $x(t-t_0)$

Page 16 chapitre 4

$$\boxed{T_F\,[x(t-t_0)] = e^{-2j\pi.f.t_0}\,.X(f) \text{ où } X(f) = T_F\,[x(t)]}$$

Exemples

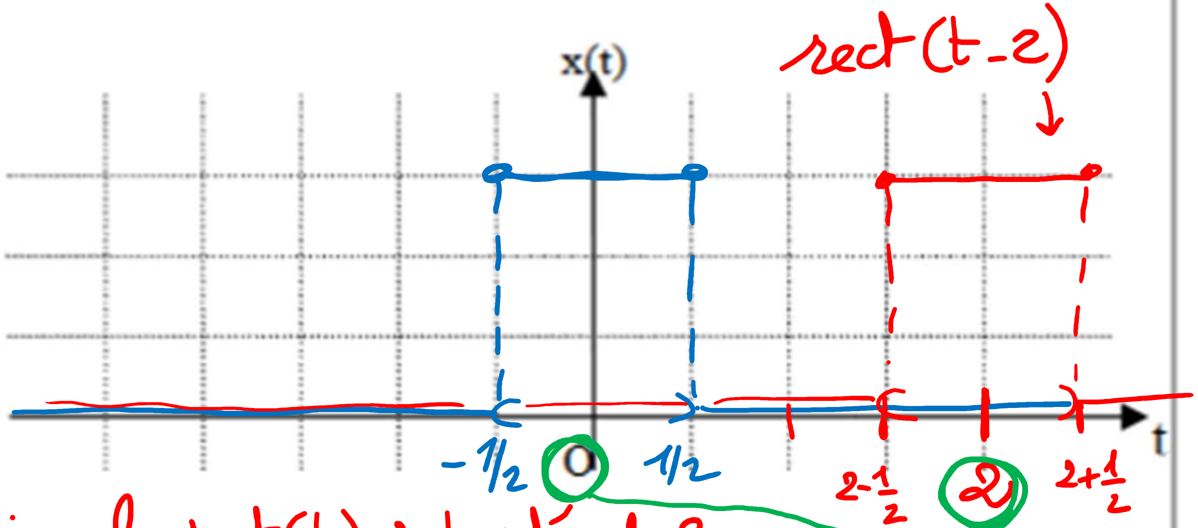
$$T_F(rect(t-2)) = \underbrace{e^{-4j\pi f}}_{\text{facteur retard}} .\,sinc(f)$$

x(t)=rect(t-2)

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & si\ -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

$$\overbrace{2-\tfrac{1}{2} \le t \le 2+\tfrac{1}{2}}$$

$$rect(t-2) = \begin{cases} 1 & si\ -\frac{1}{2} \le t-2 \le \frac{1}{2} \\ 0 & sinon. \end{cases}$$



rect(t-2) est donc le signal rect(t) retardé de 2

Page 16 chapitre 4

Exple suivant

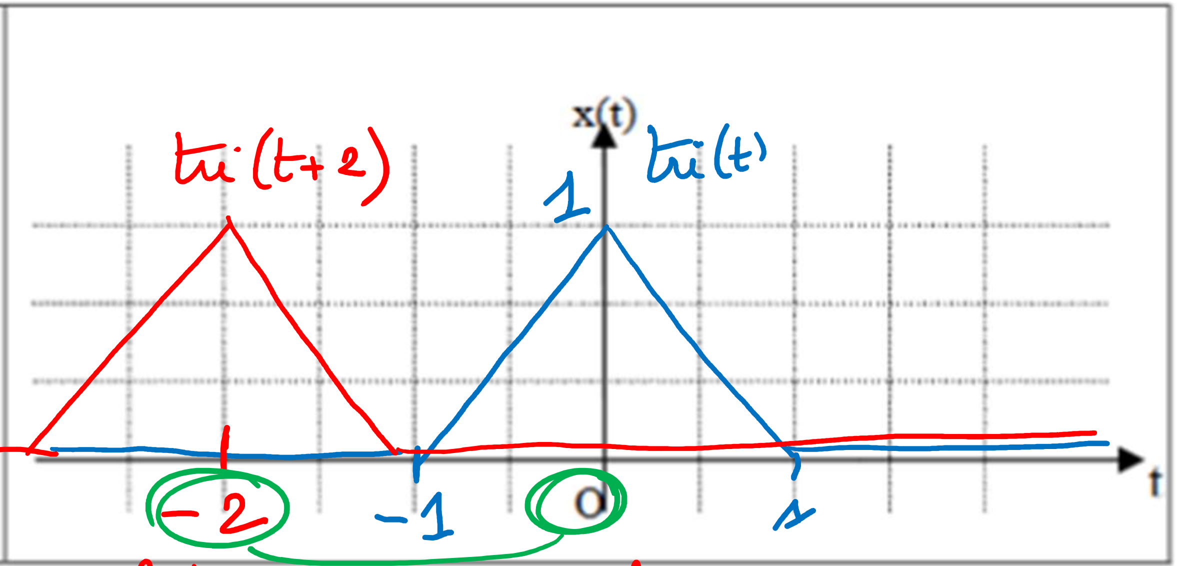
Attention au triangle

x(t)=tri(t+2)

$$TF\big(tri(t+2)\big) = e^{4j\pi f} \cdot sinc^2(f)$$

aux signs !

attention



tri(t+2) est le signal tri(t) avancé de 2

4) Transformée de Fourier d'un changement affine d'échelle x(at+b)

$$T_F\,[x(at+b)] = e^{2j\pi.f.b/a} \cdot \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right) \text{ où } X(f) = T_F\,[x(t)]$$

Page 16 chapitre 4

C'est un mélange des deux précédents !!!

Exemple

$x(t)=\mathrm{tri}(t/3-1)$

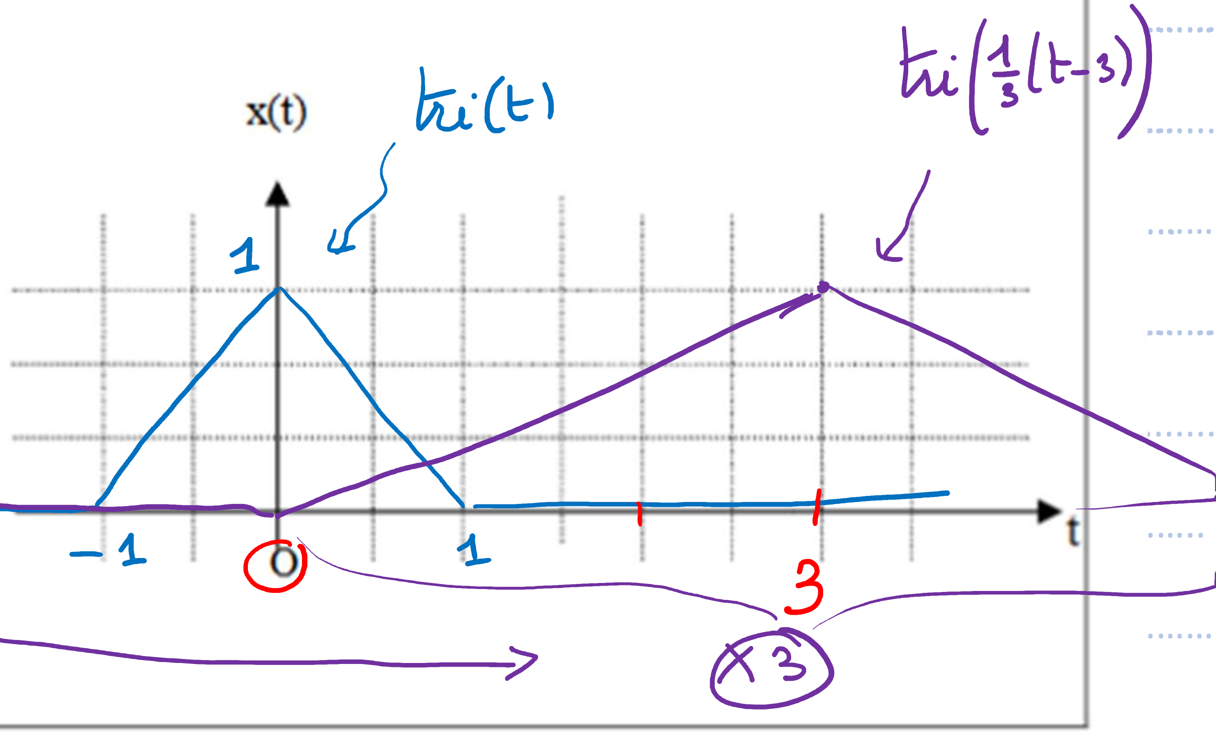
$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{3}-1\right) = \mathrm{tri}\left(\frac{1}{3}(t-3)\right)$$

Coefficient

Centre

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$T_F\left(\mathrm{tri}\left(\frac{t}{3}-1\right)\right) = e^{-6j\pi f} \cdot 3\,\mathrm{sinc}^2(3f)$$



Exercices de la partie B

Page 29 chapitre 4

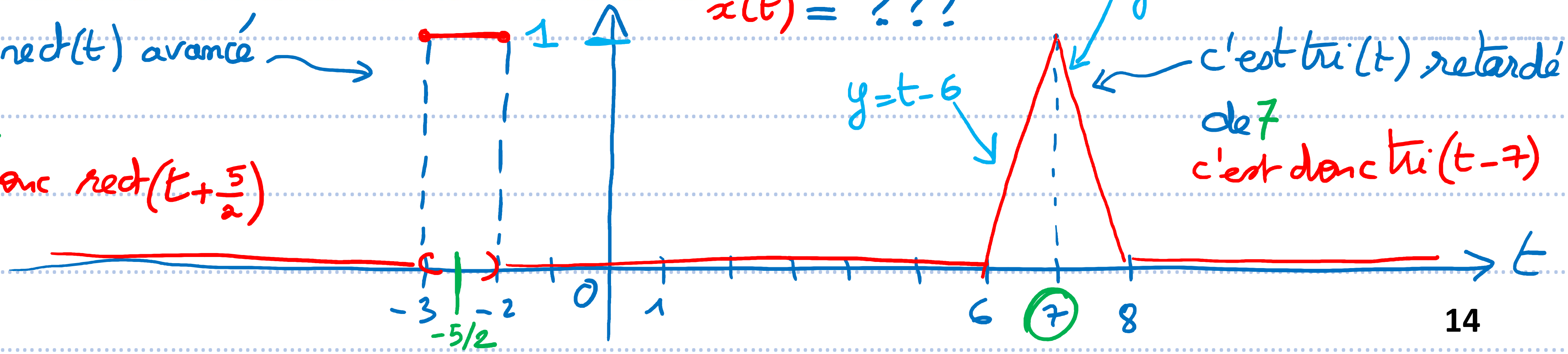
Exercice 1 : Soit x, la fonction définie par : $x(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } -3 < t < -2 \\ t - 6 \text{ si } 6 < t < 7 \\ -t + 8 \text{ si } 7 < t < 8 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Tracer la représentation graphique de x. Exprimer x à l'aide des fonction rectangle et triangle, et en déduire la transformée de Fourier de x.

$x(t) = ???$

c'est rect(t) avancé de $\frac{5}{2}$

c'est donc $rect(t+\frac{5}{2})$



c'est tri(t) retardé de 7

c'est donc $tri(t-7)$