Préparation DS de fin d’année BUT GEII 1

Séries de Fourier, EDLCC et IPP

Les EDLCC

1^{er} et 2^{nd} ordre

Quelles sont les solutions de l'équation (E) : $3y' - 5y = 7$

1. $y(t) = Ke^{-5t/3} - \frac{7}{5}$ — 1%

2. $y(t) = Ke^{5t/3} - \frac{7}{3}$ — 2%

3. $y(t) = Ke^{5/3} - \frac{7}{5}$ — 3%

✓4 4. $y(t) = Ke^{5t/3} - \frac{7}{5}$ — 4%

5. Aucune des réponses n'est juste. — 5%

Notes

Quelles sont les solutions de l'équation (E) : $3y' - 5y = 7$ (E)

① On résout $3y' - 5y = 0$ (E_0)

$ay' + y = 0 \iff y_0(t) = K.e^{-t/a}$; $K \in \mathbb{R}$

$(E_0) \iff -\frac{3}{5}y' + y = 0 \iff y_0(t) = K.e^{\frac{5}{3}t}$; $K \in \mathbb{R}$ (ici $a = -\frac{3}{5}$)

② On cherche y_p, une solution particulière de (E)

On pose $y_p = cte \Rightarrow y'_p = 0$

On remplace dans (E) : $3 \times 0 - 5 \times cte = 7 \iff cte = -\frac{7}{5}$

Donc $y_p = -\frac{7}{5}$

③ Les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$

$y(t) = K.e^{\frac{5}{3}t} - \frac{7}{5}$; $K \in \mathbb{R}$

Quelles sont les solutions de l’équation sans second membre de : $4y'' - 4y' + y = 5t$

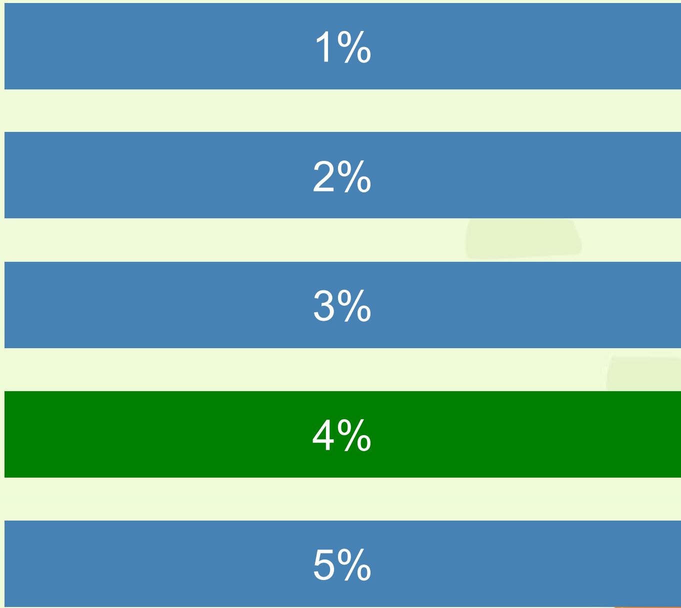
1. $y_0(t) = e^{-t/2}(K_1 + K_2)$

2. $y_0(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2)$

3. $y_0(t) = e^{-t/2}(K_1 + K_2 t)$

✓4 4. $y_0(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t)$

5. Aucune des réponses n’est juste.



Notes

Quelles sont les solutions de l'équation sans second membre de : $4y'' - 4y' + y = 5t$

① On résout $4y'' - 4y' + y = 0$ (E_0)

On résout $4r^2 - 4r + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$

$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$

ou $\left\{ 4r^2 - 4r + 1 = (2r-1)^2 = 0 \iff r = 1/2 \right.$

Les solutions de (E_0) sont donc : $y_0(t) = (k_1 + k_2 . t) . e^{t/2}$

Les solutions de : $4y'' - 4y' + y = 5t$ sont :

1. $y(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t) + 5t$ — 1%
2. $y(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t) + 5t + 20$ — 2%
3. $y(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t)$ — 3%
4. $y(t) = e^{t/2}(K_1 + K_2 t) + 5t - 20$ — 4%
5. Aucune des réponses n'est juste. — 5%

Notes

Les solutions de : $4y'' - 4y' + y = 5t$ sont :

② On cherche y_p, une solution particulière de (E).

On pose $y_p = at + b$

$y'_p = a$

$y''_p = 0$

On remplace dans (E) : $4\times 0 - 4a + at + b = 5t$

$\Leftrightarrow at + b - 4a = 5t + 0$

On identifie : $\begin{cases} a = 5 \\ b - 4a = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow a = 5$ et $b = 20$

Donc $y_p = 5t + 20$

③ Les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$

$y(t) = (k_1 + k_2 t)e^{t/2} + 5t + 20$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Q

La solution de $4y'' - 4y' + y = 5t$ vérifiant $y(0) = 2 \; et \; y'(0) = 0 \; est$:

✓1 $1. y(t) = e^{t/2}(4t - 18) + 5t + 20$ — 1%

$2. y(t) = -e^{t/2}(18 + 10t) + 5t + 20$ — 2%

3. $y(t) = e^{t/2}(2 - 4t) + 5t + 20$ — 3%

$4. y(t) = e^{t/2}(18 - 2t) + 5t - 20$ — 4%

5.Aucune des réponses n'est juste. — 5%

La solution de $4y'' - 4y' + y = 5t$ vérifiant $y(0) = 2$ *et* $y'(0) = 0$ *est* :

Les solutions sont : $y(t) = (k_1 + k_2 t)e^{t/2} + 5t + 20$

$y(0) = 2 \iff k_1 + 20 = 2 \iff k_1 = -18$

$y'(t) = (k_1 + k_2 t)' e^{t/2} + (k_1 + k_2 t)(e^{t/2})' + 5$

$y'(t) = k_2 e^{t/2} + \frac{1}{2}(k_1 + k_2 t)e^{t/2} + 5$

$y'(0) = 0 \iff k_2 + \frac{1}{2} k_1 + 5 = 0 \iff k_2 = -\frac{1}{2} k_1 - 5 = 9 - 5 = 4$

La solution est donc : $y(t) = (-18 + 4t)e^{t/2} + 5t + 20$

Les séries de Fourier

De signaux rectangle

Soit x, un signal pair *alors* :

1. *sa courbe est symétrique par rapport* à (Oy) et $b_p = 0 \ \forall p \geq 1$
2. *sa courbe est symétrique par rapport* à O et $b_p = 0 \ \forall p \geq 1$
3. *sa courbe est symétrique par rapport* à (Oy) et $a_0 = a_p = 0 \ \forall p \geq 1$
4. *sa courbe est symétrique par rapport* à O et $a_0 = a_p = 0 \ \forall p \geq 1$

1%

2%

3%

4%

5%

Soit x, un signal impair *alors* :

1. $sa\ courbe\ est\ symétrique\ par\ rapport$ à (Oy) et $b_p = 0\ \forall p \geq 1$ — 1%

2. $sa\ courbe\ est\ symétrique\ par\ rapport$ à O et $b_p = 0\ \forall p \geq 1$ — 2%

3. $sa\ courbe\ est\ symétrique\ par\ rapport$ à (Oy) et $a_0 = a_p = 0\ \forall p \geq 1$ — 3%

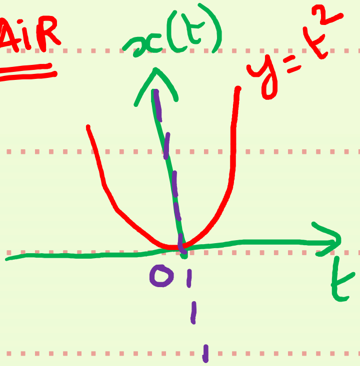
✓4 4. $sa\ courbe\ est\ symétrique\ par\ rapport$ à O et $a_0 = a_p = 0\ \forall p \geq 1$ — 4%

Notes

Série de Fourier de x :

$$S(t) = \underbrace{a_0}_{\text{pairs}} + \sum_{p\geq1} \underbrace{a_p \cos(p\omega t)}_{\text{pairs}} + \underbrace{b_p \sin(p\omega t)}_{\text{impairs}}$$

PAIR

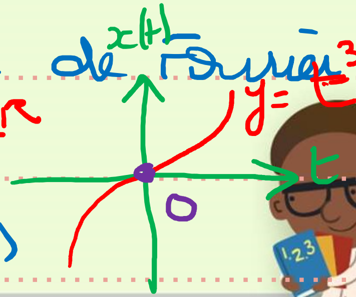


- Si x est pair alors sa série de Fourier est en Cosinus et $b_p = 0 \ \forall p \geq 0$.

$$S(t) = a_0 + \sum_{p\geq1} a_p \cdot \cos(p\omega t)$$

- Si x est impair alors sa série de Fourier est en sinus et $a_0 = a_p = 0 \ \forall p \geq 1$

IMPAIR



$$S(t) = \sum_{p\geq1} b_p \sin(p\omega t)$$

Quelle est la valeur de l'intégrale : $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3.\cos(5t)\, dt$

✓1 1. $I = \frac{6}{5}$	1%
2. $I = 0$	2%
3. $I = -30$	3%
4. $I = 30$	4%
5. $I = 15$	5%

Notes

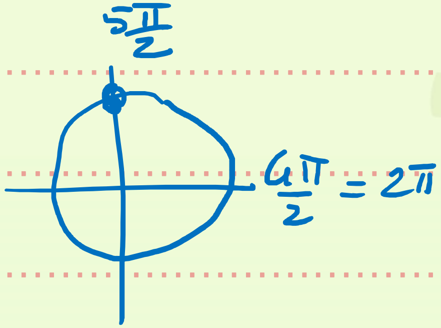
Quelle est la valeur de l’intégrale : $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3.\underbrace{\cos(5t)}_{\text{pair}}\,dt$

centré en 0

$$I = 2 \times \int_0^{\pi/2} 3.\cos(5t)\,dt = 6 \times \int_0^{\pi/2} \cos(5t)\,dt$$

$$= 6 \times \left[\frac{\sin(5t)}{5}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{6}{5}\left(\sin\frac{5\pi}{2} - \sin 0\right)$$



$$I = \frac{6}{5}$$

Soit S défini ci-dessous, la série de Fourier d'un signal x.

$$S(t) = -\frac{3}{2} + 5\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}\cos(3p\pi t)$$

La valeur moyenne de x est alors

1. 0	1%
✓2 2. -1,5	2%
3. -3	3%
4. Aucune des valeurs citées n'est juste.	4%

Soit S défini ci-dessous, la série de Fourier d'un signal x.

Notes

$$S(t) = -\frac{3}{2} + 5\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}\cos(3p\pi t)$$

La valeur moyenne de x est alors

$$S(t) = \underbrace{a_0}_{\text{Valeur moyenne}} + \sum_{p \geq 1} a_p \cos(p\omega t) + b_p \sin(p\omega t)$$

Ici $a_0 = -\frac{3}{2}$

Soit S défini ci-dessous, la série de Fourier d'un signal x.

$$S(t) = -\frac{3}{2} + 5\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}\cos(3p\pi t)$$

Le signal x est alors :

1. pair et de période T=3/2 — 1%
2. impair et de période T=3/2 — 2%
3. pair et de période T=2/3 — 3%
4. impair et de période T=2/3 — 4%

Soit S défini ci-dessous, la série de Fourier d’un signal x.

Notes

$$S(t) = -\frac{3}{2} + 5\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2} \cos(3p\pi t) \rightarrow 3p\pi t = p\omega t \Leftrightarrow \omega = 3\pi$$

Le signal x est alors :

Série de Fourier en Cosinus $\Longrightarrow$ x est pair

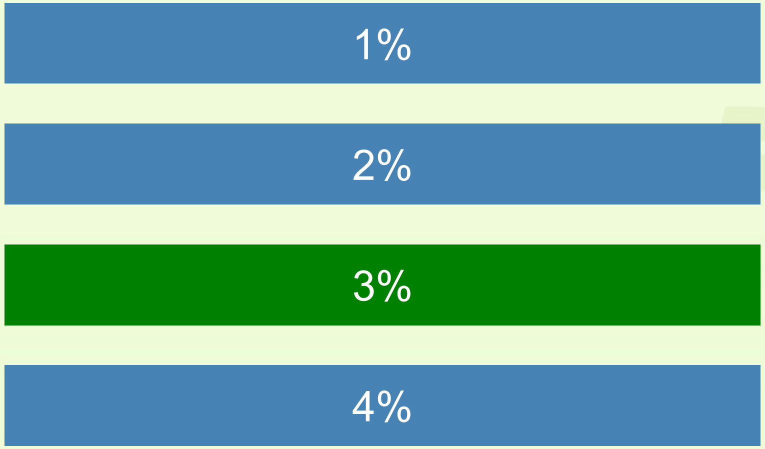
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}.$$

Soit S défini ci-dessous, la série de Fourier d'un signal x.

$$S(t) = -\frac{3}{2} + 5\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p^2}\cos(3p\pi t)$$

$Le\ fondamental\ de$ x est alors :

1. -5
2. $\cos(3\pi t)$
3. $-5.\cos(3\pi t)$
4. -1



Soit S défini ci-dessous, la série de Fourier d'un signal x.

Notes

$$S(t) = -\frac{3}{2} + 5\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^2}\cos(3p\pi t)$$

$Le\ fondamental\ de$ x est alors :

$$H_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + \cancel{b_1 \sin(\omega t)} \to 0$$

$$a_p = 5 \cdot \frac{(-1)^p}{p^2} \Rightarrow a_1 = -5.$$

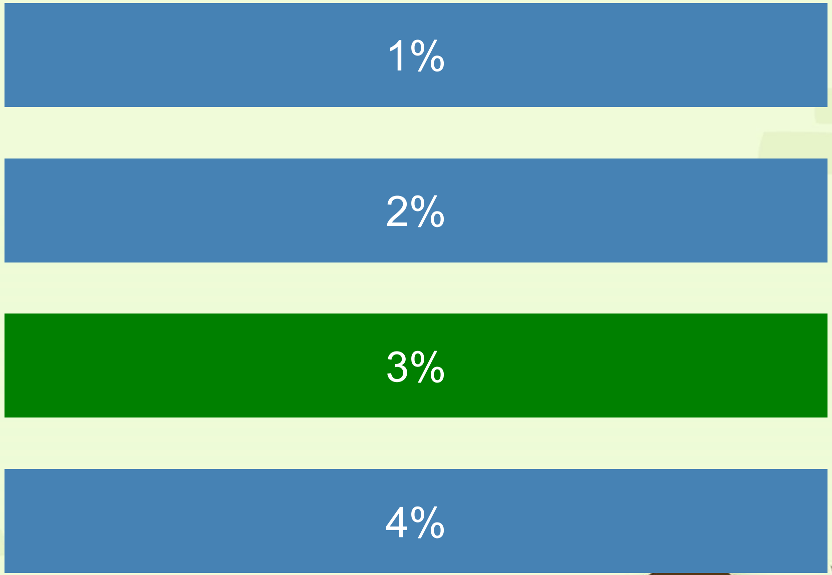
$$H_1(t) = -5\cos(3\pi t)$$

Soit S défini ci-dessous, la série de Fourier d'un signal x.

$$S(t) = 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p - 1}{p} \cos(p\pi t)$$

On peut alors écrire que :

1. $S = 2.\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{2k+1}$
2. $S = -4.\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{2k+1}$
3. $S = -4.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{2k+1}$
4. $S = 4.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{2k+1}$



Soit S défini ci-dessous, la série de Fourier d'un signal x.

$$S(t) = 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p - 1}{p} \cos(p\pi t)$$

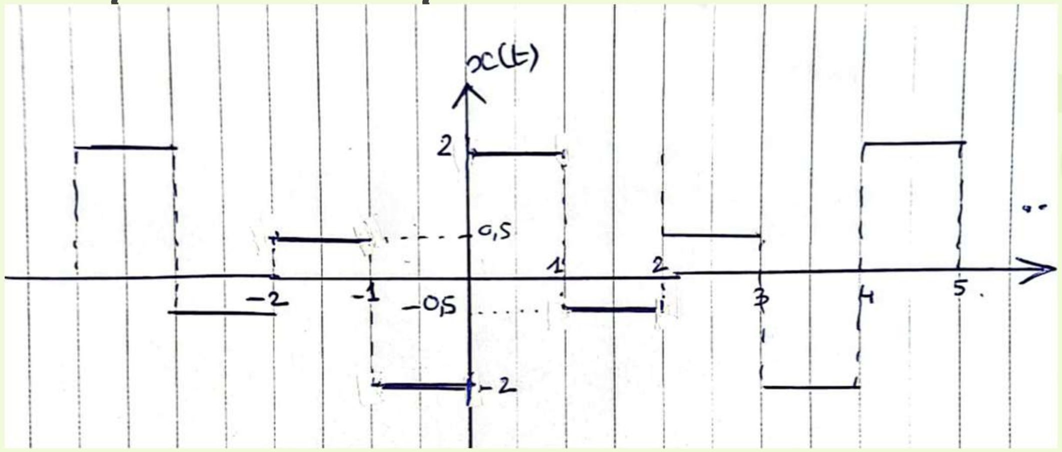
On peut alors écrire que :

$$S(t) = 2 \cdot \left(\underset{\substack{\uparrow \\ p=1}}{\frac{-2}{1}} \cdot \cos(\pi t) + \underset{\substack{\uparrow \\ p=2}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ p=3}}{\frac{-2}{3}} \cos(3\pi t) + \underset{\substack{\uparrow \\ p=4}}{0} + \frac{-2}{5} \cos(5\pi t) + 0 + \cdots \right)$$

Les harmoniques de rang pair étant nul, on somme sur les impairs :

$$S = -4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi t)}{2k+1}$$

Soit x, *le signal représenté par* :



$1.\ x\ est\ pair\ et\ a\ pour\ période\ T = 4$ — 1%

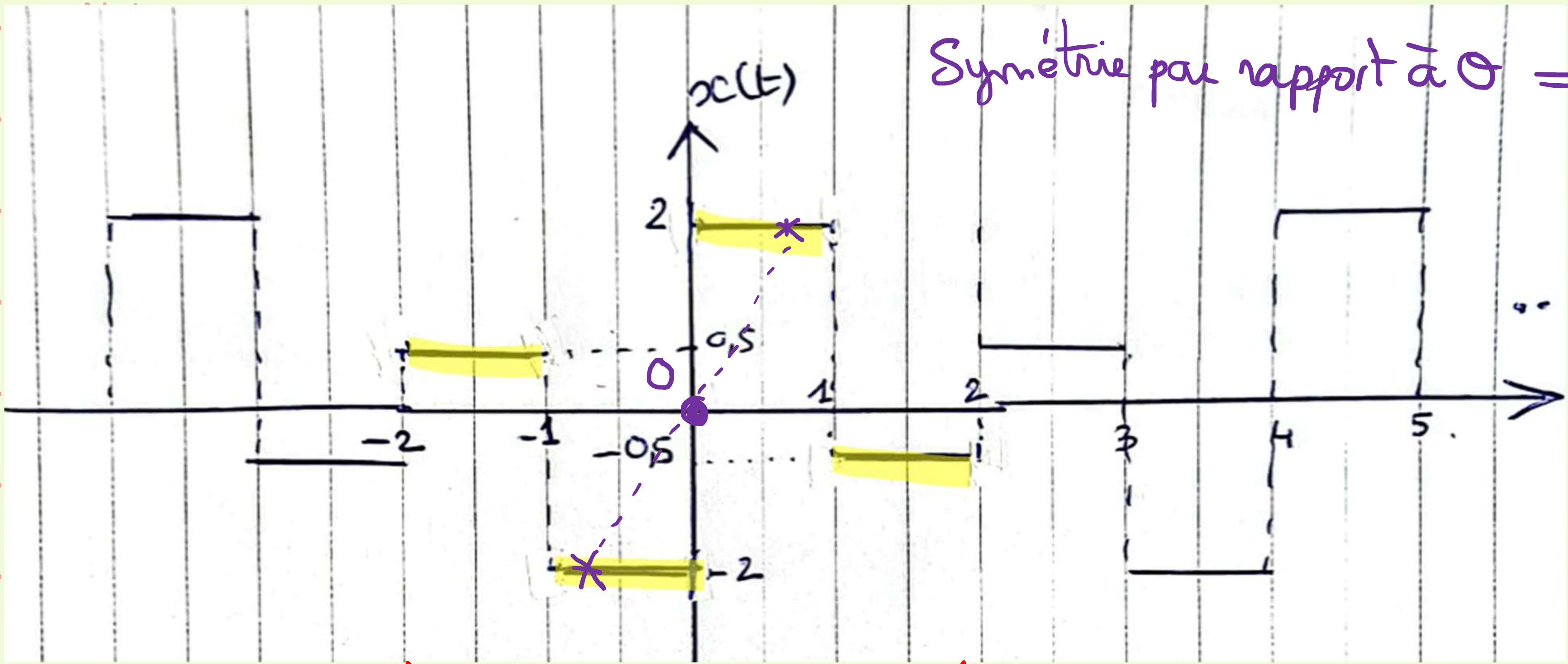
$2.\ x\ est\ impair\ et\ a\ pour\ période\ T = 4$ — 2%

$3.\ x\ est\ pair\ et\ a\ pour\ période\ T = 2$ — 3%

$4. x\ est\ impair\ et\ a\ pour\ période\ T = 2$ — 4%

5. x est ni pair ni impair — 5%

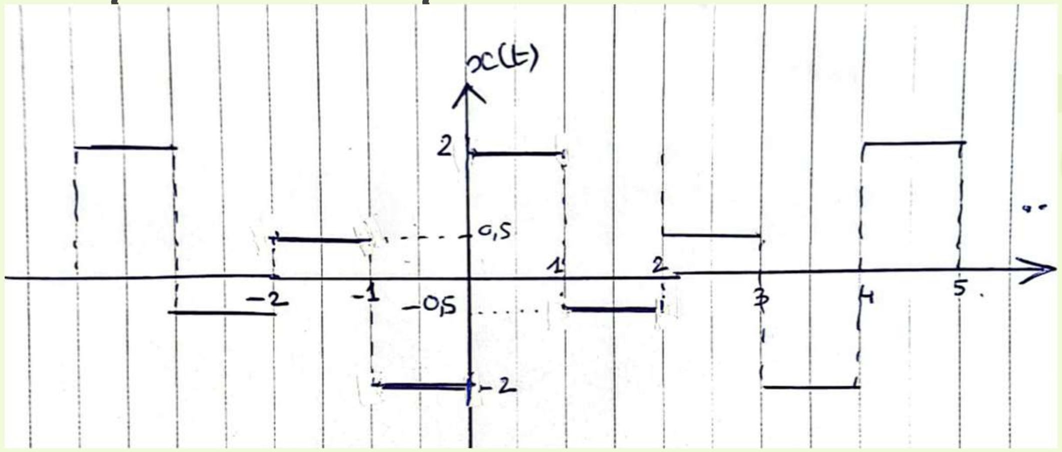
Symétrie par rapport à O $\Longrightarrow$ <u>IMPAIR</u>.



$T = 4$

Q

Soit x, *le signal représenté par* :

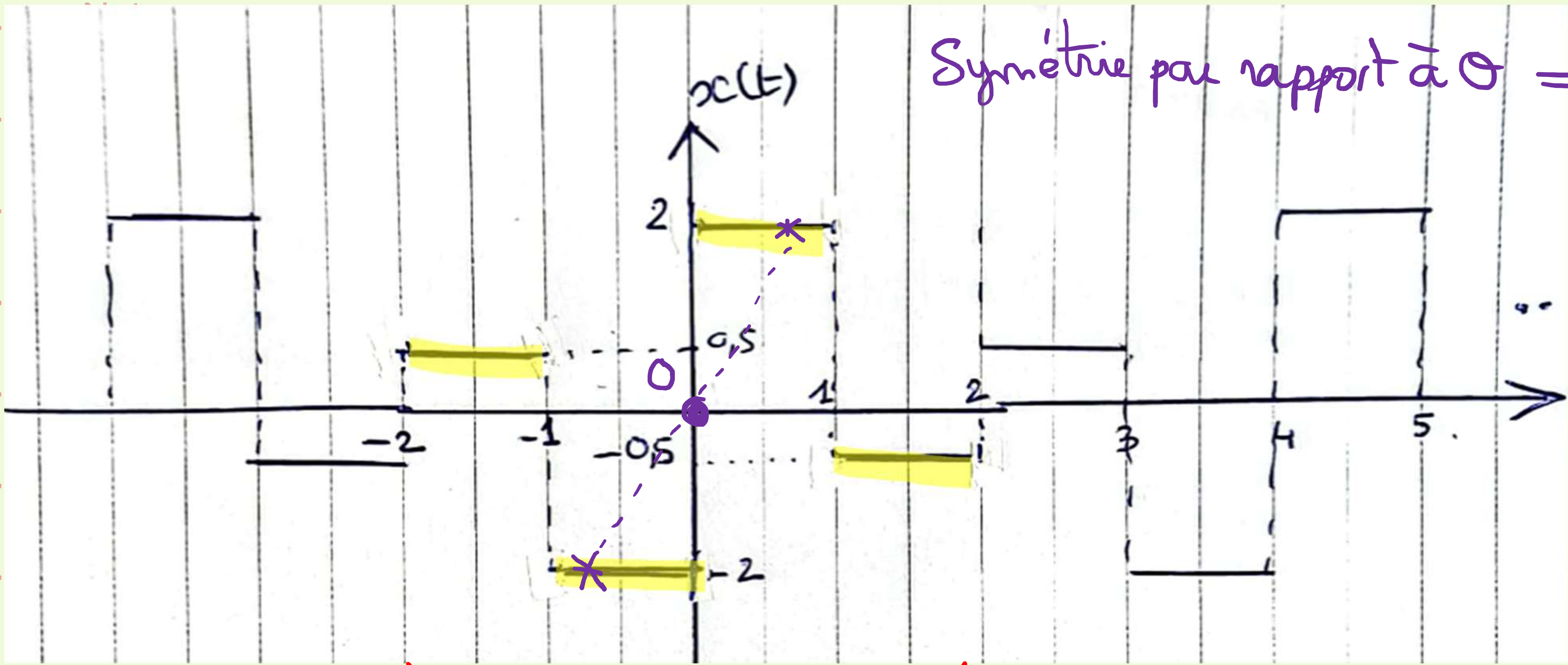


✓1 1. $a_0 = a_p = 0\ \forall p \geq 1$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$ — 1%

2. $b_p = 0\ \forall p \geq 1$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$ — 2%

3. $b_p = 0\ \forall p \geq 1$ et $\omega = \frac{2}{\pi}$ — 3%

4. $a_0 = a_p = 0\ \forall p \geq 1$ et $\omega = \frac{2}{\pi}$ — 4%



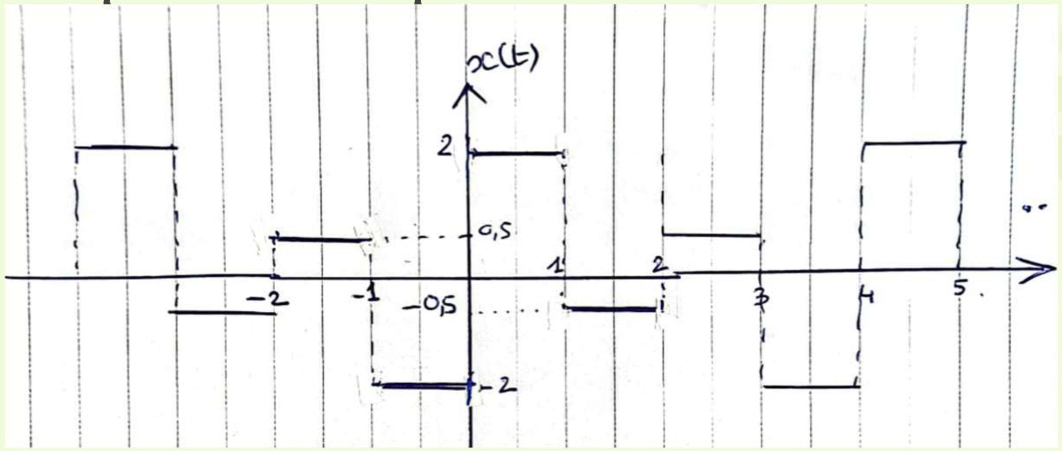
Symétrie par rapport à O $\Rightarrow$ <u>IMPAIR</u>.

$T = 4$

x est impair, donc sa série de Fourier est en sinus et

$a_0 = a_p = 0 \quad \forall p \geq 1$. $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Soit x, *le signal représenté par* :

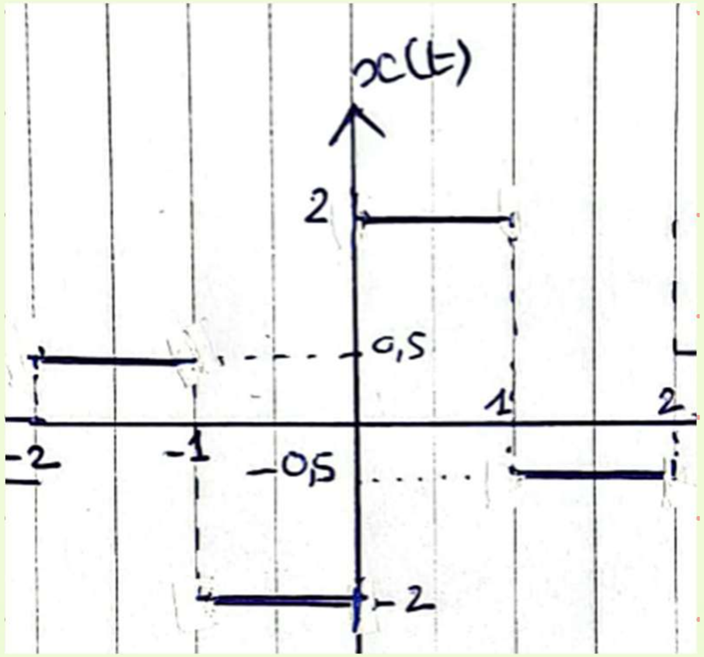


1. $b_p = \int_0^2 1.5.\sin\left(\frac{p\pi}{2}t\right)dt$ — 1%

2. $b_p = \frac{1}{2}.\int_{-2}^{2} 1.5.\sin\left(\frac{p\pi}{2}t\right)dt$ — 2%

3. $b_p = \int_0^1 2.sin\left(\frac{p\pi}{2}t\right)dt + \int_1^2 -0.5.sin\left(\frac{p\pi}{2}t\right)dt$ — 3%

4. *Aucune des réponses précédentes n’est juste.* — 4%



$$b_p = \frac{2}{T}\cdot\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t)\,dt \qquad \forall p \geq 1$$

$$b_p = \frac{2}{4}\cdot\int_{-2}^{2} \underbrace{x(t)}_{\text{impaire}}.\underbrace{\sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)}_{\text{impaire}}\,dt$$

impaire . impaire = paire

$$b_p = \frac{1}{2}\cdot 2\times\int_{0}^{2} x(t).\sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)\,dt$$

Chasles

$$b_p = \int_{0}^{1} 2.\sin\left(\frac{p\pi}{2}t\right)dt + \int_{1}^{2} -\frac{1}{2}\sin\left(p\frac{\pi}{2}t\right)dt$$

$$b_p = 2\times\left[\frac{-\cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right)}{p\frac{\pi}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\left(p\frac{\pi}{2}t\right)}{p\frac{\pi}{2}}\right]_1^2$$

$$b_p = \frac{4}{p\pi}\left(-\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)+1\right) - \frac{1}{p\pi}\left(-\cos(p\pi)+\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\right) \text{ etc...}$$

Les IPP

Calcul intégral

Dans la formule d'intégration par parties, on a : $\int_a^b U.V'dt =$

1. $\int_a^b U.V'dt = \int_a^b UV\,dt - \int_a^b U'V\,dt$	1%
2. $\int_a^b U.V'dt = [UV]_a^b . \int_a^b U'V\,dt$	2%
3. $\int_a^b U.V'dt = [UV]_a^b - \int_a^b U'V'\,dt$	3%
✓4 4. $\int_a^b U.V'dt = [UV]_a^b - \int_a^b U'V\,dt$	4%

Notes

Dans la formule d'intégration par parties, on a : $\int_a^b U.V'dt =$

Rappel : $(U.V)' = U'.V + UV'$

$$\int_a^b (U.V)'\,dt = \int_a^b U'.V\,dt + \int_a^b U.V'\,dt$$

$$[U.V]_a^b = \int_a^b U'.V\,dt + \int_a^b U.V'\,dt$$

$$\int_a^b U.V'\,dt = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$$

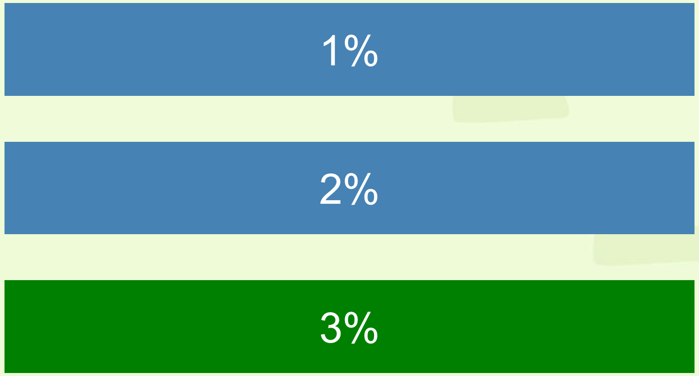
On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$

Peut-on écrire que :

1. $I = 2.\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$?

$2.\, I = 0$?

✓3 $3.\, Ni\ la\ réponse\ 1\ ni\ la\ 2\ n'est\ juste.$



On souhaite calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$

Notes

centrée en 0 — pair — ni pair, ni impair

Peut-on écrire que : Ni 1) Ni 2)

f est ni pair, ni impair. En effet :

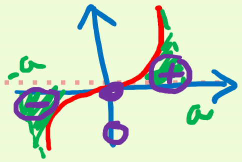
Si $f(t)=\cos(3t).e^{-t}$ alors $f(-t)=\cos(-3t).e^{t}=\cos(3t)e^{t}$

Contre Exple : $f(-\pi)=\cos(3\pi)e^{\pi}=-e^{\pi}$

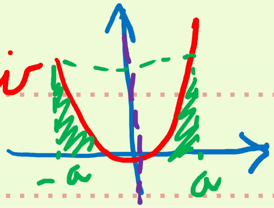
$f(\pi)=\cos(-3\pi)\,e^{-\pi}=-e^{-\pi}=-\frac{1}{e^{\pi}}\neq f(-\pi)$ et $\neq -f(-\pi)$

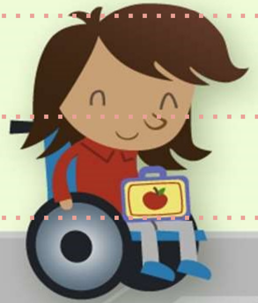
f est donc ni pair, ni impair.

Rappel : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ si f est impair



$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\times\int_{0}^{a} f(x)dx$ si f est pair





Q

Pour calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$ à l'aide d'une IPP, on pose $U = e^{-t}$ et $V' = \cos(3t)$ et on obtient :

1. $I = \frac{-1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$ — 1%

2. $I = 3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$ — 2%

✓3 3. $I = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$ — 3%

4. $I = -3\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$ — 4%

Pour calculer l'intégrale I = $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt$ à l'aide d'une IPP,

on pose U = e^{-t} et V' = cos(3t) et on obtient :

$$U' = -e^{-t} \qquad V = \frac{\sin(3t)}{3}$$

$$I = [U.V]_a^b - \int_a^b U'.V\,dt$$

$$I = \frac{1}{3}\left[e^{-t}.\sin(3t)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} + \frac{1}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin(3t).e^{-t}\,dt$$

$$I = \frac{1}{3}\underbrace{\left(e^{-\pi/3}.\sin(\pi) - e^{\pi/3}.\sin(-\pi)\right)}_{0} + \frac{1}{3}.\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sin(3t)e^{-t}\,dt$$


Q

Pour calculer l'intégrale I = $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$

à l'aide d'une deuxième IPP, on obtient :

✓1 1. $I = \frac{1}{9}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\}$ 1%

2. $I = \frac{1}{9}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\}$ 2%

3. $I = \frac{1}{9}\left\{e^{\frac{\pi}{3}} - e^{-\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\}$ 3%

4. $I = \frac{1}{9}\left\{e^{\frac{\pi}{3}} - e^{-\frac{\pi}{3}} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\}$ 4%

Pour calculer l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3t)e^{-t}dt$

Notes

à l'aide d'une deuxième IPP, on obtient :

On pose $u = e^{-t}$ $\quad u' = -e^{-t}$

$v' = \sin(3t)$ $\quad v = -\frac{\cos(3t)}{3}$

$$I = [u.v]_a^b - \int_a^b u'v\,dt$$

$$I = \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{3}\left[e^{-t}.\cos(3t)\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{1}{3}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(3t).e^{-t}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{3}\left(e^{-\pi/3}\underbrace{\cos\pi}_{-1} - e^{\pi/3}\underbrace{\cos(-\pi)}_{-1}\right) - \frac{1}{3}\int^{\pi/3} \cos(3t)e^{-t}\,dt\right\}$$

$$I = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(e^{-\pi/3} - e^{-\pi/3}\right) - \frac{1}{3}I\right\} = \frac{1}{9}\left\{e^{-\pi/3} - e^{\pi/3} - I\right\}$$

Après deux IPP on a alors :

$$\mathrm{I} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt = \frac{1}{9}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}} - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt\right\} \text{ donc :}$$

1. $I = \frac{-1}{10}$ — 1%
2. $I = \frac{1}{9}\left(e^{\frac{-\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}}\right)$ — 2%
3. $I = \frac{1}{8}\left(e^{\frac{-\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}}\right)$ — 3%
4. $I = \frac{1}{10}\left(e^{\frac{-\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}}\right)$ — 4%
5. $I = \frac{1}{10}$ — 5%

Après deux IPP on a alors :

Notes

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3t)e^{-t}dt = \frac{1}{9}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}} - e^{\frac{\pi}{3}} - \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos(3t)e^{-t}dt}_{I}\right\}$$ donc :

$$I = \frac{1}{9}\left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3}\right) - \frac{1}{9} I$$

$$I\Big(\underbrace{1+\frac{1}{9}}_{\frac{10}{9}}\Big) = \frac{1}{9}\left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3}\right)$$

$$I = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9}\left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3}\right)$$

$$I = \frac{1}{10}\left(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3}\right).$$