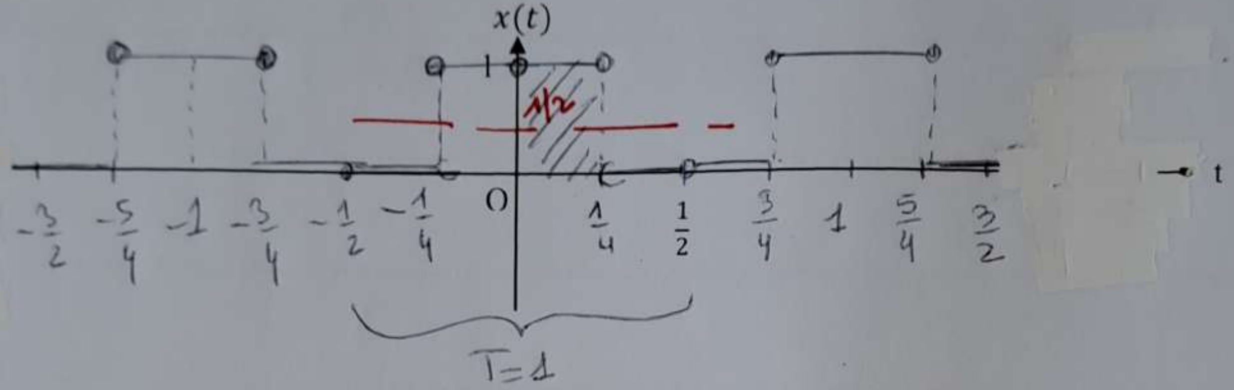
Nom : .... **Prénom :** .... **Groupe :** ....

Calculatrice : Collège   Formulaires : en page 5 du sujet   Répondre sur le sujet

Exercice 1 : Série de Fourier (7 pts)

Soit x, le signal périodique pair, de période 1, défini par : $x(t) = \begin{cases} 1 \; si \; 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ 0 \; si \; \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2} \end{cases}$



1) Représenter le signal x pour t variant de -2 à 2 secondes.

2) Quelle est la valeur moyenne de x ?

Par lecture graphique $a_0 = \frac{1}{2}$

Ou $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = 1 \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{x(t)}_{\text{paire}}\,dt = 2 \times \int_0^{1/2} x(t)\,dt$

$a_0 = 2 \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{2}$

3) Calculer les coefficients de Fourier de x :

Comme x est pair alors $b_p = 0 \; \forall p \geq 1$ $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$

$a_p = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(p\omega t)\,dt = 2\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{x(t)\cos(2p\pi t)}_{\text{paire} \times \text{paire} = \text{paire}}\,dt$

$a_p = 4 \times \int_0^{1/2} x(t)\cos(2p\pi t)\,dt \overset{\text{chasles}}{=} 4 \times \int_0^{1/4} x(t)\cos(2\pi p t)\,dt + \underbrace{4\int_{1/4}^{1/2} 0\,dt}_{=0}$

$p \geq 1$

$a_p = 4 \times \int_0^{1/4} \cos(2p\pi t)\,dt = 4 \left[\frac{\sin(2p\pi t)}{2p\pi} \right]_0^{1/4} = \frac{2}{p\pi}\left(\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) - 0\right)$

$a_p = \frac{2}{p\pi} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \quad \forall p \geq 1$

4) Déterminer le fondamental et les harmoniques de rang pair du signal x :

$H_1(t) = a_1 \cos(2\pi t) + b_1 \sin(2\pi t) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\pi t)$

$H_1(t) = \frac{2}{\pi} \cos(2\pi t)$ est le fondamental

$H_{2k}(t) = a_{2k} \cos(4\pi k t) = \frac{2}{2k\pi} \sin\left(\frac{2k\pi}{2}\right) = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi) = 0$

car $k \in \mathbb{N}^*$

5) Quelle est l'expression simplifiée de la série de Fourier de x ?

$S_x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{p\pi} \sin\left(p\frac{\pi}{2}\right) \cos(2\pi p t)$

$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(p\pi/2)}{p} \cos(2p\pi t)$

Exercice 2 EDLCC du premier et du second ordre (9 pts)

1) Résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante : $5y' - 2y = 4$ (E)

→ On résout $5y' - 2y = 0$

⇔ $\frac{5}{2}y' + y = 0$

Les solutions sont : $y_0(t) = K.e^{\frac{2}{5}t}$; $K \in \mathbb{R}$

→ On cherche y_p, une solution particulière de (E)

On pose $y_p = cte \Rightarrow y_p' = 0$

On remplace dans (E) : $-2cte = 4 \Leftrightarrow cte = -2$

→ Les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$

$y(t) = K.e^{\frac{2}{5}t} - 2$; $K \in \mathbb{R}$

2) Résoudre, en rédigeant le mieux possible, l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante :

$$\begin{cases} y'' + y = 3t^2 - 1 \text{ (E)} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

→ On résout $y'' + y = 0$ (E_0)

On résout $r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -1 \Leftrightarrow r = \pm i$

Les solutions de (E_0) sont donc : $y_0(t) = K_1\cos t + K_2\sin t$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

→ On cherche y_p, une solution particulière de (E)

On pose $y_p = at^2 + bt + c$

$y_p' = 2at + b$ et $y_p'' = 2a$

On remplace dans (E) : $2a + at^2 + bt + c = 3t^2 - 1$

$\Leftrightarrow at^2 + bt + 2a + c = 3t^2 - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ 2a + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -1 - 6 = -7 \end{cases}$$

Ainsi $y_p(t) = 3t^2 - 7$

→ Les solutions de (E) sont donc $y = y_0 + y_p$

$y(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t + 3t^2 - 7$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

→ Condition initiale : $y(0) = 1$

$\Leftrightarrow y(0) = k_1 - 7 = 1 \Leftrightarrow k_1 = 8$

$y'(t) = -k_1 \sin t + k_2 \cos t + 6t$

$y'(0) = -1 \Leftrightarrow k_2 = -1$

La solution est donc :

$y(t) = 8 \cos t - \sin t + 3t^2 - 7$

<u>Exercice 3</u> Calcul d'une intégrale par double IPP (4 pts)

Calculer à l'aide d'une double intégration par parties : $I = \int_0^1 (x^2 - 5).e^{2x}dx$

$$\begin{cases} u = x^2 - 5 \\ v' = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 2x \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$I = \left[(x^2 - 5) \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} \, dx \qquad \begin{cases} U = x & U' = 1 \\ V' = e^{2x} & V = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}$$

$$= -4 \frac{e^2}{2} + \frac{5}{2} - \left\{ \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} \, dx \right\}$$

$$= -2e^2 + \frac{5}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4} \left[e^{2x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{5}{2} e^2 + \frac{5}{2} + \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{9}{4} e^2 + \frac{9}{4}$$

$$I = \frac{9}{4} \left(1 - e^2 \right)$$