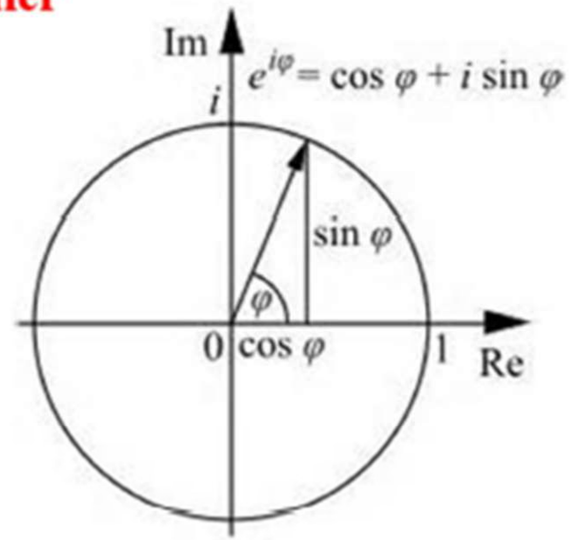
Chapitre 2 : Les bases des nombres complexes pour le GEII

Leonhard Euler



$$e^{i\pi}+1=0$$

Page 5 chapitre 2

Partie A : Définitions et notations du GEII

I. Introduction

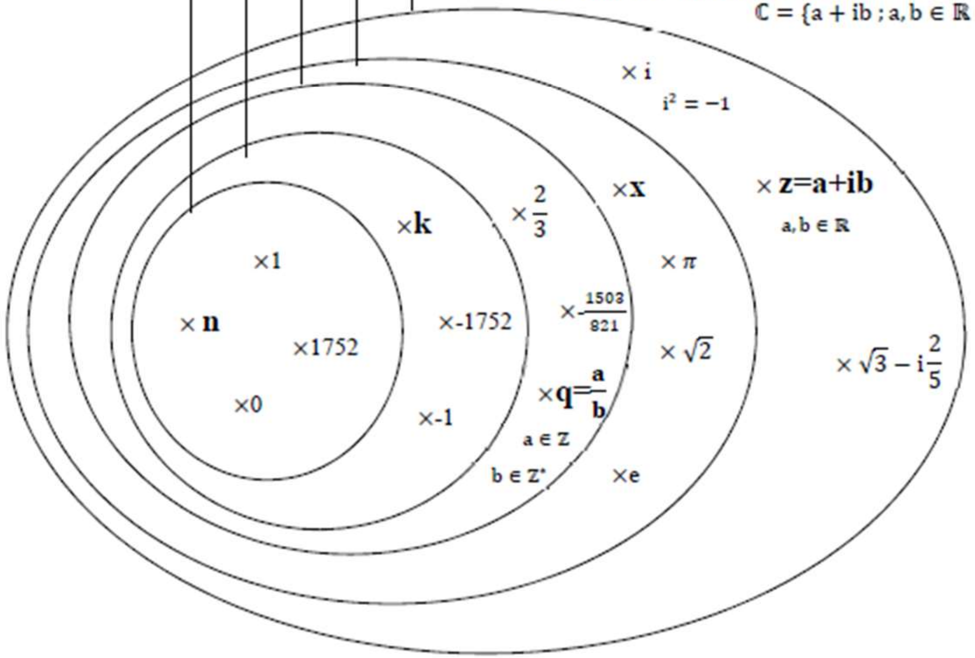
Ensemble des nombres <u>entiers naturels</u> : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\ \dots;n\,;\dots\}$

Ensemble des nombres <u>entiers relatifs</u> :
$\mathbb{Z} = \{\dots;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;3\,;\dots;k\,;\dots\}$

Ensembles des nombres <u>rationnels</u> : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,;a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres <u>réels</u> : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}\,;\ e\,;\ \pi\,;\dots;x\,;\dots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres <u>complexes</u> :
$\mathbb{C} = \{a + ib\,; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notes Résoudre $x^2+1=0 \iff x^2=-1<0$ c'est impossible dans $\mathbb{R}$. Page 4 chapitre 2

Soit i, un nombre imaginaire tel que $\boxed{i^2=-1}$

$x^2=-1 \iff x^2=i^2 \iff x=i$ ou $-i$ $\quad S_{\mathbb{R}}=\emptyset$ et $S_{\mathbb{C}}=\{-i;i\}$

$(-i)^2=i^2=-1$

Résoudre $x^2+4=0 \iff x^2=\underbrace{-4}_{-1\times 4}$

$\iff x^2=i^2.2^2 \iff x^2=(2i)^2 \iff x=2i$ ou $-2i$

$S_{\mathbb{R}}=\emptyset \quad S_{\mathbb{C}}=\{-2i;2i\}$

Résoudre $x^2+2x+5=0$

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times5=4-20=-16<0$ pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Rappel : $\Delta>0$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ $\quad \Delta=i^2.4^2=(4i)^2$

Une racine carrée de Δ dans $\mathbb{C}$ est donc $4i$

On obtient : $x_1=\dfrac{-2-4i}{2}=\dfrac{\cancel{2}(-1-2i)}{\cancel{2}}=-1-2i$ et $x_2=-1+2i$ $\quad S_{\mathbb{C}}=\{-1-2i;-1+2i\}$

Notes Résoudre $x^2+1=0$

Page 4 chapitre 2

Résoudre $x^2+4=0$

Résoudre $x^2+2x+5=0$ $a=1$ $b=2$ $c=5$

$\Delta>0$
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)(5)=4-20=-16=i^2 \cdot 4^2=(4i)^2$

les solutions : $\begin{cases} x_1=\frac{-2+i4}{2}=\frac{2(-1+2i)}{2}=-1+2i \\ x_2=\frac{-2-i4}{2}=\frac{2(-1-2i)}{2}=-1-2i \end{cases}$

$S_{\mathbb{R}}=\emptyset$

$S_{\mathbb{C}}=\{-1+2i\,;\,-1-2i\}$

- Notations MATHS - $i^2=-1$.
$\mathbb{C}=\{z=a+ib\,;\,a,b\in\mathbb{R}\}$

NOTATIONS GEII
$\mathbb{C}=\{\underline{\underline{z}}=a+jb\,;\,a,b\in\mathbb{R}\}$ ici $j^2=-1$

Page 5 chapitre 2

Ensemble des nombres <u>entiers naturels</u> : $\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;\ \dots\,; n\,; \dots\}$

Ensemble des nombres <u>entiers relatifs</u> :
$\mathbb{Z} = \{\dots;\ -3\,;\ -2\,;\ -1\,;\ 0\,;1\,;2\,;3\,;\dots;k\,;\dots\}$

Ensembles des nombres <u>rationnels</u> : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,; a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Ensembles des nombres <u>réels</u> : $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \underbrace{\{\sqrt{2}\,;\ e\,;\ \pi\,;\dots;x\,;\dots\}}_{\text{nombres irrationnels}}$

Ensemble des nombres <u>complexes</u> :
$\mathbb{C} = \{a + ib\,; a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$

$\times\, i$

$i^2 = -1$

On appelle i le nombre imaginaire, défini par : $\boxed{i^2 = -1.}$

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} = \{z = a + ib\,; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

Dans cet ensemble toute équation du second degré possède deux solutions.

En électricité la lettre i étant réservée à l'intensité d'un courant, nous la remplacerons par la lettre j.

Pour résoudre $az^2+bz+c=0$ avec $\Delta = b^2-4ac<0$, on a les solutions suivantes: $z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notes

Simplifier dans $\mathbb{C}$:

Page 4 chapitre 2

$(3-4i).(1+i) = 3+\underbrace{3i-4i}-4\underbrace{i^2}_{-1} = 3-i+4 = 7-i$

$\boxed{i^2=-1}$ $\quad i^3 = i \times i^2 = -i$

$1+i+i^2+i^3 = 1+i-1-i = 0$

$\underbrace{(1+2i)^2}+(2-i)^2 = 1^2+4i+\underbrace{(2i)^2}_{-4}+4-4i+\underbrace{i^2}_{-1} = 0$

$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

$(3-4i).(3+4i) = 3^2-(4i)^2 = 3^2-(-16) = 9+16 = 25.$

$(A-B)(A+B) = A^2-B^2.$

$Z = \frac{2+i}{3-4i} = \underbrace{\frac{2+i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i}} = \frac{6+8i+3i-4}{3^2+4^2} = \frac{2+11i}{25} = \frac{2}{25} + \frac{11}{25}i$

$a+ib$

$\frac{2}{25}$ partie réelle de Z

$\frac{11}{25}$ → partie imaginaire

Notations Maths

$z = a+ib$ où $i^2=-1$

$a, b \in \mathbb{R}$

Notations du GEII.

$Z = a+jb$ où $j^2=-1$

$a, b \in \mathbb{R}$

II. Définitions et notations du GEII

Page 7 chapitre 2

- ✓ **Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :**

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où} \quad x \in \mathbb{R}\,,\ y \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

Notes

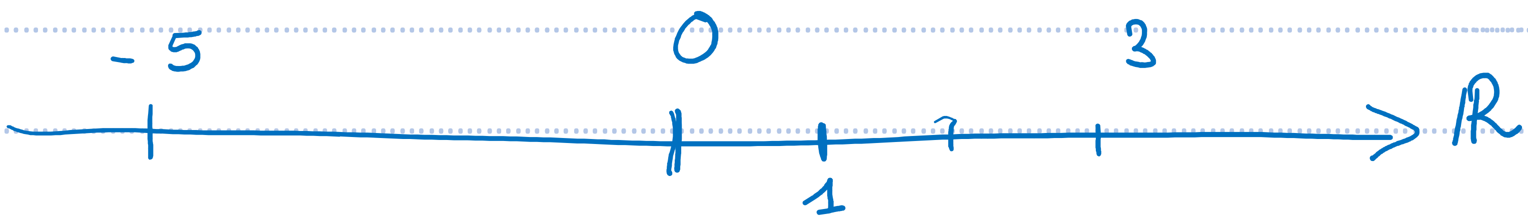
Page 6 chapitre 2

$z_1 = 3+5j$ $\quad Re(z_1) = 3$ $\quad Im(z_1) = 5$

$z_2 = 5$ $\quad Re(z_2) = 5$ $\quad Im(z_2) = 0$

$z_3 = j-1$ $\quad Re(z_3) = -1$ $\quad Re(z_3) = 1$

$z_4 = -3j$ $\quad Re(z_4) = 0$ $\quad Re(z_4) = -3$



Notes

Page 6 chapitre 2

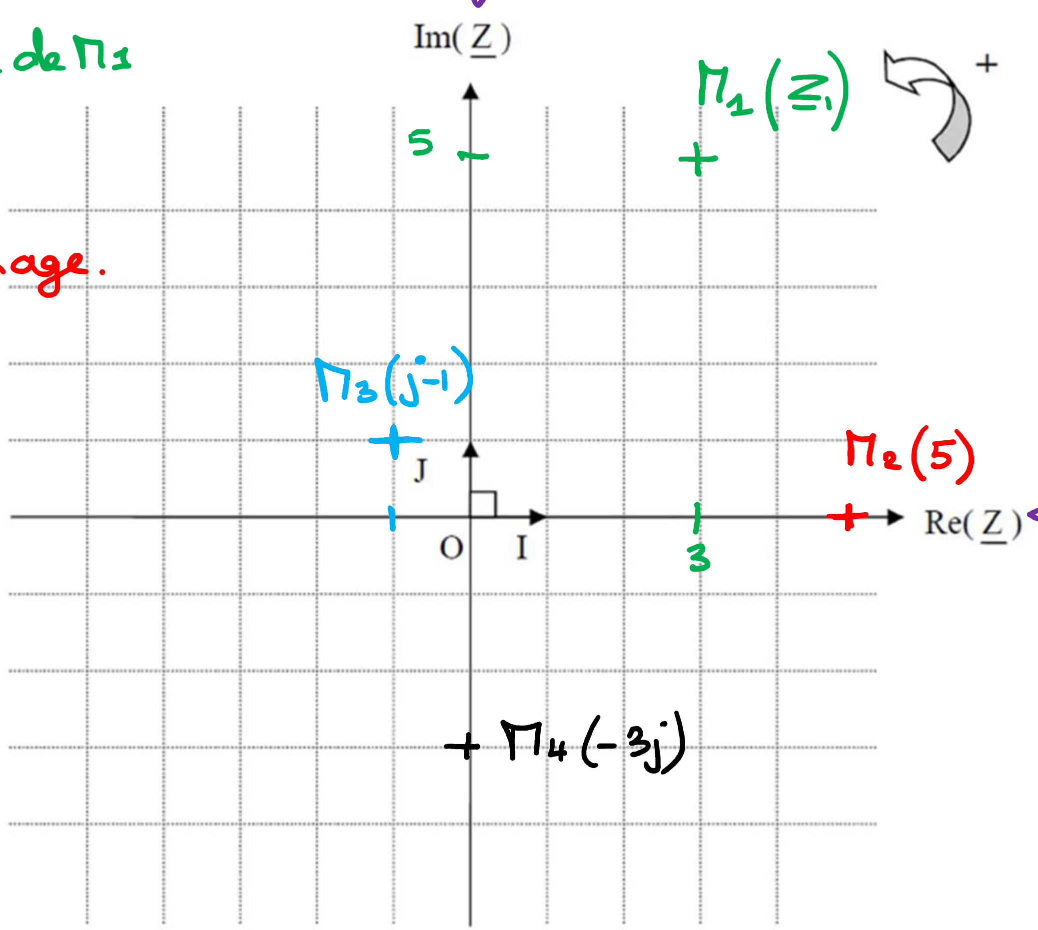
$Z_1 = 3+5j$ est l'affixe de M_1

$Z_2 = 5$. M_2 est son image.

$Z_3 = j-1$

$Z_4 = -3j$

axe des imaginaires purs.



axe des réels

Page 7 chapitre 2

II. Définitions et notations du GEII

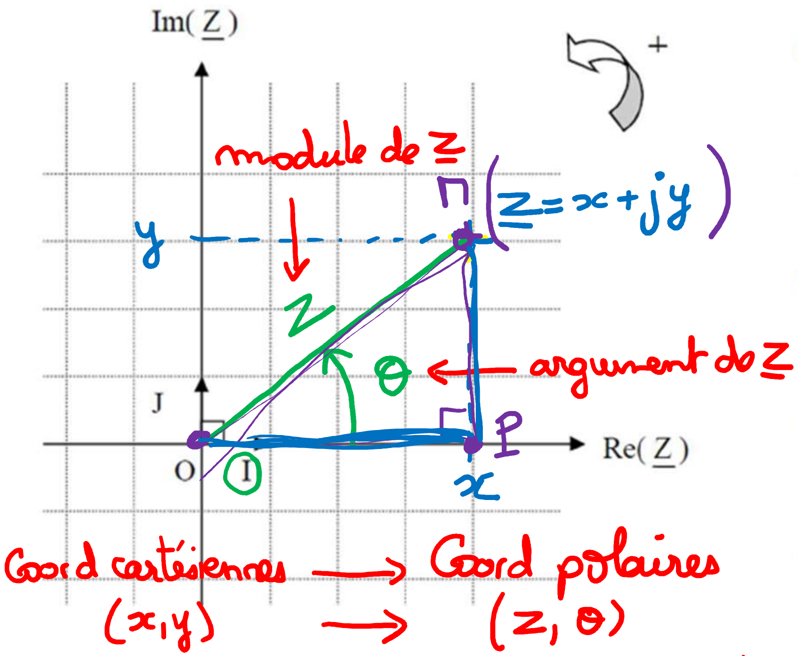
- ✓ **Tout nombre complexe $\underline{Z}$ s'écrit de la forme :**

$$\underline{Z} = x + j.y \quad \text{où } x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \text{ et } j^2 = -1$$

x est la partie réelle de $\underline{Z}$
On note : $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$

y est la partie imaginaire de $\underline{Z}$
On note : $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$

- ✓ **Le plan complexe : On représente un nombre réel sur une droite munie d'un repère $\left(O, \vec{OI}\right)$. Tout nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ (où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) est représenté dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{OI}, \vec{OJ}\right)$ par le point M d'abscisse $x = \mathcal{R}e(\underline{Z})$ et d'ordonnée $y = \mathrm{Im}(\underline{Z})$**
Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



Page 7 chapitre 2

Calcul de OM : Pythagore : $OM^2 = OP^2 + PM^2$

$Z^2 = x^2 + y^2$

module de Z : $Z = \sqrt{x^2+y^2}$

Soit θ, la mesure de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$

$\cos(\theta) = \frac{Adj}{Hyp} = \frac{OP}{OM} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{Z} = \frac{Re(Z)}{Z}$

$\sin(\theta) = \frac{Opp}{Hyp} = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{Z} = \frac{Im(Z)}{Z}$

GEII MATHS

✓ **Le module de $\underline{Z}$ est noté Z ou encore $|\underline{Z}|$, c'est la distance de O à M, ainsi :**

$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{x^2+y^2}$

✓ **L'argument de $\underline{Z}$ est noté $\arg(\underline{Z})$, c'est la mesure en radians de l'angle de vecteur orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$, déterminée à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$). On note $\theta = \arg(\underline{Z})$,**

on a alors : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Re(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{Im(\underline{Z})}{Z} \end{cases}$ **si $Z \neq 0$.**

Page 7&8 chapitre 2

$$\textbf{on a alors :} \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{Z} = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Re}(\underline{Z})}{Z} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{Z} = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{Z} \end{cases} \quad \text{si } Z \neq 0.$$

Remarques : 1. si Z=0, alors M=O, l'origine du repère, O, ne possède pas d'argument.

2. sinon, on a alors : x = ……………… et y =………………………

3. (x,y) sont appelées « coordonnées cartésiennes » du point M, image du nombre complexe $\underline{Z} = x + j.y$ et ($|\underline{\mathbf{Z}}|$, θ) sont appelées « les coordonnées polaires » du point M.

Notes

Page 9 chapitre 2

Forme algébrique de $\underline{Z}$: (coordonnées cartésiennes)

$\underline{Z} = x + j.y$

Forme trigonométrique de $\underline{Z}$: (coordonnées polaires)

$\underline{Z} = Z.\cos(\theta) + j.Z.\sin(\theta) = Z.\left(\cos(\theta) + j.\sin(\theta)\right)$ **aussi noté :** $\underline{Z} = [Z\,,\theta]$

Forme exponentielle, géométrique ou polaire : Euler a noté $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j.\sin(\theta)$

$\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$

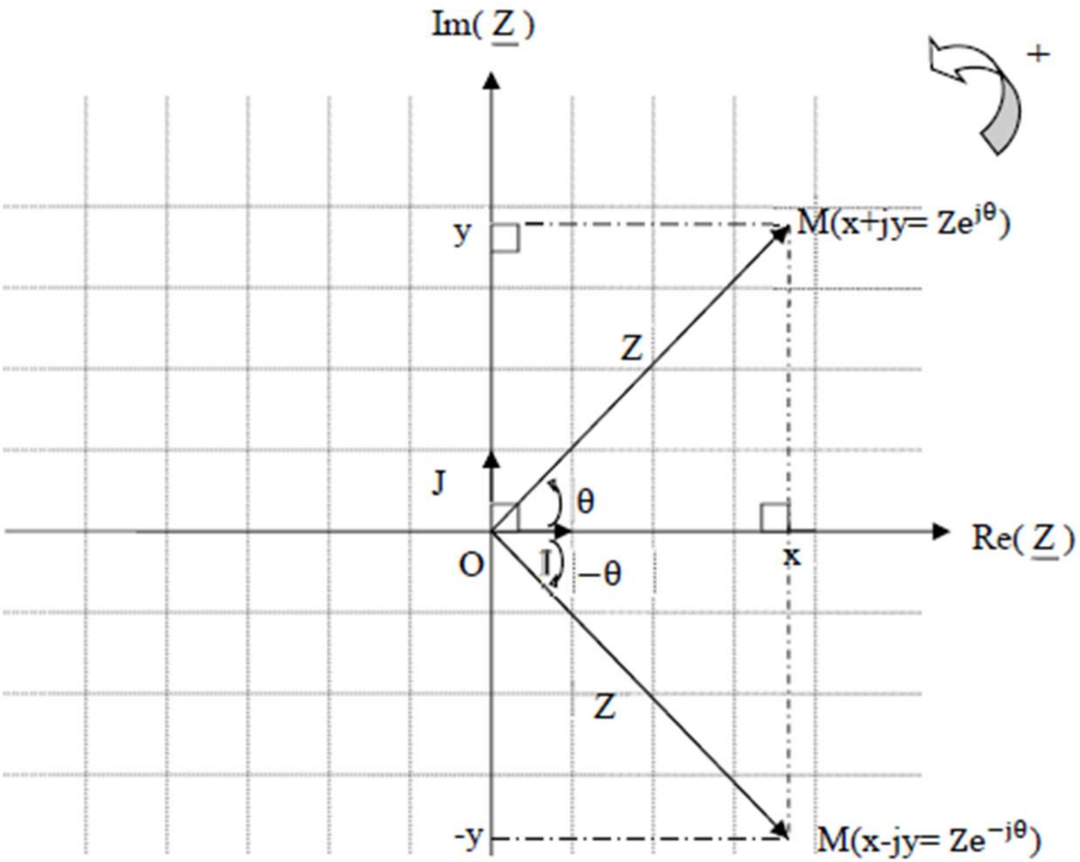
Notes

Page 9 chapitre 2

Nombre complexe conjugué de $\underline{Z}$: Soit $\underline{Z} = x + j.y$, on appelle conjugué de $\underline{Z}$, et on note $\underline{Z}^*$, le nombre complexe défini par : $\underline{Z}^* = x - j.y$. Si $\underline{Z} = Z.e^{j.\theta}$, alors $\underline{Z}^* = Z.e^{-j\theta}$

Le plan complexe est muni d'un RON $(O\,;\vec{OI},\ \vec{OJ})$ orienté dans le sens direct.
$\underline{Z} = x + j.y$ où $x, y \in \mathbb{R}$

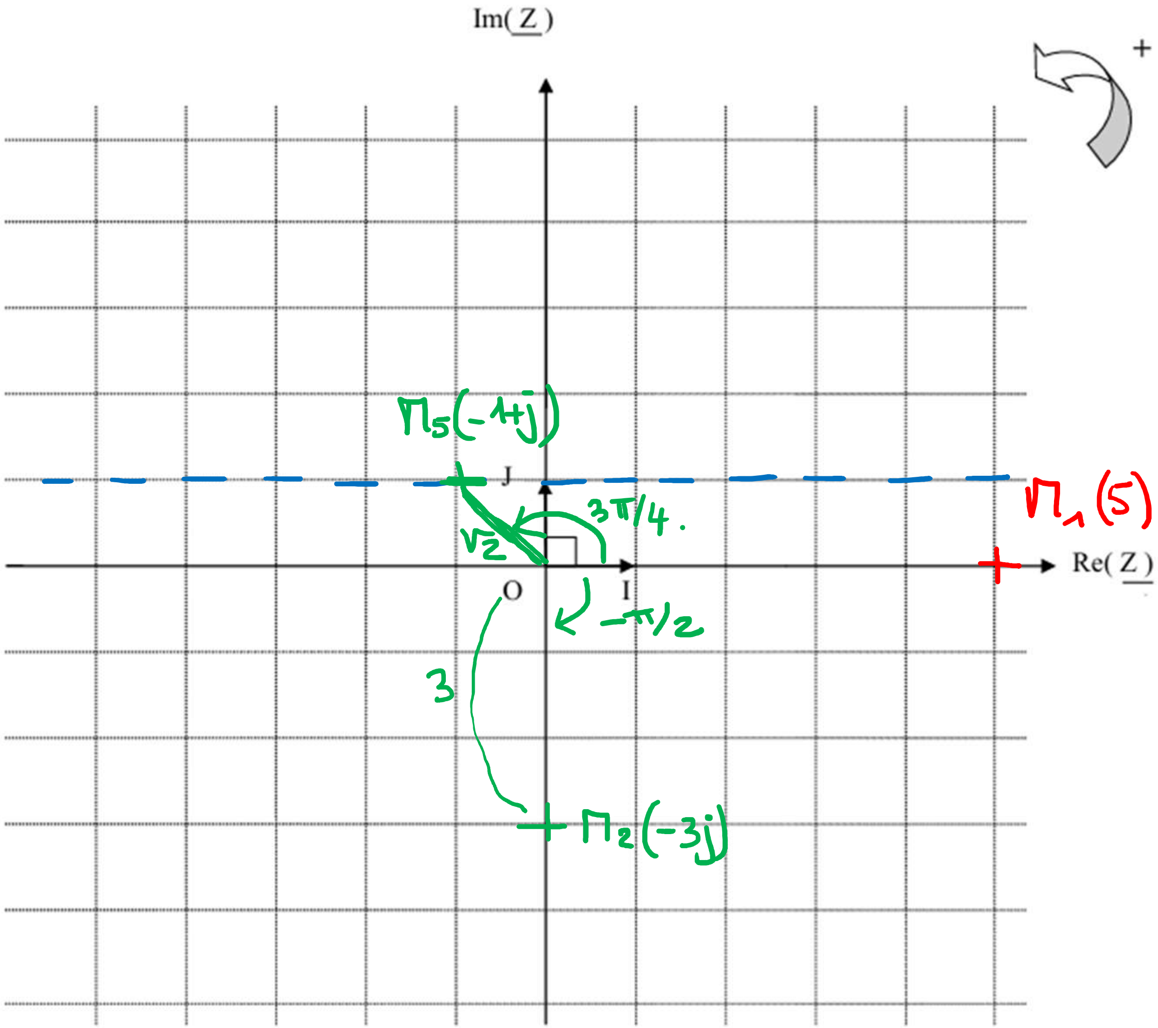
Le point M(x,y) est appelé image de $\underline{Z}$.
$\underline{Z}$ est appelé l'affixe du point M.
$\underline{Z}$ est aussi appelé l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.
$\vec{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$



$\underline{Z} = x + jy$ $\underline{Z} = Z.e^{j\theta}$ $\underline{Z} = [Z, \theta]$	$Re(\underline{Z}) = x$ $Re(\underline{Z}) = Z.\cos\theta$	$Im(\underline{Z}) = y$ $Im(\underline{Z}) = Z.\sin\theta$	$\lvert\underline{Z}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\lvert\underline{Z}\rvert = Z$	$Arg(\underline{Z}) = \theta$	Ecriture exponentielle ou algébrique	Conjugué : $\underline{Z}^* = x - jy$ $\underline{Z}^* = Z.e^{-j\theta}$ $\underline{Z}^* = [Z, -\theta]$
$\underline{Z_1} = 5$	5	0	$Z_1 = \sqrt{5^2+0^2} = 5$	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{5}{5} = 1 \\ \sin\theta = \frac{0}{5} = 0 \end{cases}$ $\theta_1 = 0$	$5.e^{j.0}$	$\underline{Z}_1^* = 5 = 5.e^{j0} = [5, 0]$
$\underline{Z_2} = -3j$	0	-3	$Z_2 = \sqrt{0^2+3^2}$ 3	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\theta = \frac{-3}{3} = -1 \end{cases}$ $-\pi/2$	$3.e^{-j\frac{\pi}{2}}$	$\underline{Z}_2^* = 3j = 3e^{j\frac{\pi}{2}} = [3; 90°]$
$\underline{Z_3} = \sqrt{3} + j$	$\sqrt{3}$	1	$Z_3 = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$ $Z_3 = 2$	$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\pi/6$	$2.e^{j\frac{\pi}{6}}$	$\underline{Z}_3^* = \sqrt{3} - j = 2e^{-j\frac{\pi}{6}} = [2; -30°]$
$\underline{Z_4} = \sqrt{3} - j$	$\sqrt{3}$	-1	$Z_4 = \sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$ $Z_4 = 2$	$\begin{cases} \cos\theta = \sqrt{3}/2 \\ \sin\theta = -1/2 \end{cases}$ $-\pi/6$	$2.e^{-j\frac{\pi}{6}}$	$\underline{Z}_4^* = \sqrt{3} + j = 2e^{j\frac{\pi}{6}} = [2; 30°]$

$\underline{Z} = x + jy$ $\quad$ $\underline{Z}^* = x - jy$ $\quad$ $\left[\ \frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°\right.$

Notes



$Z_5 = -1+j$	-1	1	$Z_5 = \sqrt{1^2+1^2}$ $Z_5 = \sqrt{2}$	$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $3\pi/4$	$\sqrt{2}.e^{j\frac{3\pi}{4}}$	$Z_5^* = -1-j = \sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} = [\sqrt{2};135°]$
$Z_6 = -4-4j\sqrt{3}$	$-4 < 0$	$-4\sqrt{3}$	8	$\arg(Z_6) = \arctan\left(\frac{Im(Z_6)}{Re(Z_6)}\right) + \pi$	$= \arctan(\sqrt{3}) + \pi$	$= \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$
$Z_7 = 1e^{j\frac{\pi}{2}}$ ×	$Z_7.\cos\theta_7$ $1.\cos\frac{\pi}{2} = 0$	$Z_7.\sin\theta_7$ $1.\sin\pi/2 = 1$	1	$\frac{\pi}{2}$	$Z_7 = 0 + j$	$Z_7^* = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}} = [1;-90°]$
$Z_8 = 1e^{j\pi}$ (module; arg.)	$1.\cos\pi$ $= -1$	$1.\sin\pi$ 0	$Z_8 = 1$	π	$Z_8 = -1$	$Z_8^* = -1 = e^{-j\pi} = [1;-180°]$
$Z_9 = e^{2j\pi} = e^{j2\pi} = e^{j.0} = e^{-j4\pi}$	$1.\cos(2\pi)$ 1	$1.\sin(2\pi)$ 0	$Z_9 = 1$	2π ou 0	$Z_9 = 1$	$Z_9^* = 1 = e^{-2j\pi} = [1;-360°]$

$-2\pi\ ;\ 4\pi\ \ldots$

$$\frac{3\times180}{4} = \frac{3\times90}{2} = 3\times45 = 135$$

EULER $Ze^{j\theta} = Z\cos\theta + jZ\sin\theta$

Rappel

$$Z = x+jy = Z\cos\theta + jZ\sin\theta = Ze^{j\theta} = [Z,\theta]$$

alg. trigo. expo polaire

$$Z^* = x-jy = \qquad = Ze^{-j\theta} = [Z,-\theta]$$

$\underline{Z_{10}} = [\overset{\text{module}}{7}, \overset{\text{arg}}{-\frac{\pi}{3}}]$	$7\cos(-\pi/3)$ $7/2 = x$	$7\sin(-\pi/3)$ $-\frac{7\sqrt{3}}{2} = y$	7	$-\pi/3$	$7e^{-j\pi/3}$ $\frac{7}{2} - j\frac{7\sqrt{3}}{2}$	$\underline{Z}_{10}^* = \frac{7}{2} + j\frac{7\sqrt{3}}{2} = 7e^{j\pi/3} = [7, +60°]$
$\underline{Z_{11}} = e^{kj\pi}$; $k\epsilon\mathbb{Z}$	$1.\cos(k\pi)$ $(-1)^k$	$1.\sin(k\pi)$ 0	1	$k\pi$	$x + jy$ $(-1)^k$	$\underline{Z}_{11}^* = (-1)^k = e^{-kj\pi} = [1, -180°k]$

Notes :

Suite de la p. 8

Notes

$Z_4 = \underset{>0}{3} + 5j \qquad Re(Z_4) = 3 > 0 \qquad Im(Z_4) = 5$

$|Z_4| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

$\arg(Z_4) = \theta$ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{Re(Z_4)}{|Z_4|} = \dfrac{3}{\sqrt{34}} \\ \sin\theta = \dfrac{Im(Z_4)}{|Z_4|} = \dfrac{5}{\sqrt{34}} \end{cases} \iff \theta ? \quad \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{5}{\sqrt{34}}}{\frac{3}{\sqrt{34}}} = \dfrac{5}{\cancel{\sqrt{34}}} \times \dfrac{\cancel{\sqrt{34}}}{3} = \dfrac{5}{3}$

$\theta = \arctan\left(\dfrac{5}{3}\right) = \arctan\left(\dfrac{Im(Z_4)}{Re(Z_4)}\right)$

$Z_5 = \underset{>0}{1} - j \qquad Re(Z_5) = 1 > 0 \qquad Im(Z_5) = -1$

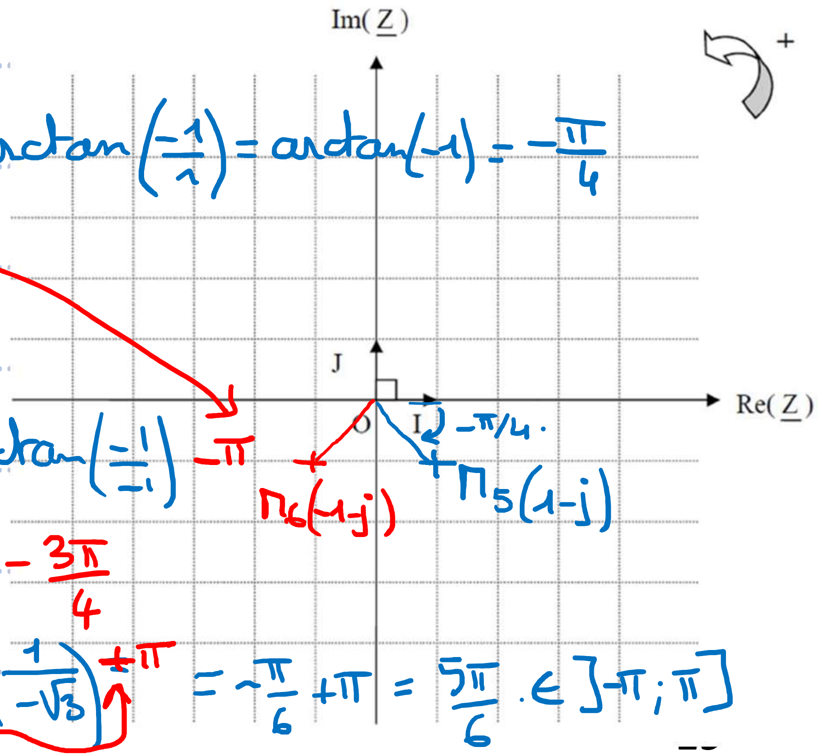
$|Z_5| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \arg(Z_5) = \arctan\left(\dfrac{Im(Z_5)}{Re(Z_5)}\right) = \arctan\left(\dfrac{-1}{1}\right) = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

$Z_6 = \underset{<0}{-1} - j \qquad Re(Z_6) = -1 < 0 \qquad Im(Z_6) = -1$

$|Z_6| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \arg(Z_6) = \arctan\left(\dfrac{Im(Z_6)}{Re(Z_6)}\right) - \pi = \arctan\left(\dfrac{-1}{-1}\right) - \pi$

$= \arctan 1 - \pi = \dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{3\pi}{4}$

$Z_7 = j \underset{<0}{-\sqrt{3}} \qquad |Z_7| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ et $\arg(Z_7) = \arctan\left(\dfrac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5\pi}{6} \in \left]-\pi ; \pi\right]$



Notes

Page 15 chapitre 2

Partie C : Opérations sur les module et arguments d'un nombre complexe

I. Argument d'un nombre complexe et arctangente

Comment obtenir θ l'argument d'un nombre complexe, lorsqu'il n'est pas remarquable ?

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul et $a \neq 0$.
Pour déterminer un argument de $\underline{Z}$, on calcule

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\text{partie réelle de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{module de } \underline{Z}} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Si θ n'est pas un angle remarquable, alors on calcule : $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b}{a}$.
On peut alors en déduire θ, en utilisant la fonction Arctangente, mais en faisant très attention, car $\text{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$!!! En effet, lorsque la partie réelle de $\underline{Z}$ est négative, la mesure principale de son argument θ n'est pas dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour obtenir le bon résultat, il suffit donc d'ajouter ou de soustraire π à $\text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$

A retenir

Soit $\underline{Z} = a + j.b$ un nombre complexe non nul, tel que $a \neq 0$.

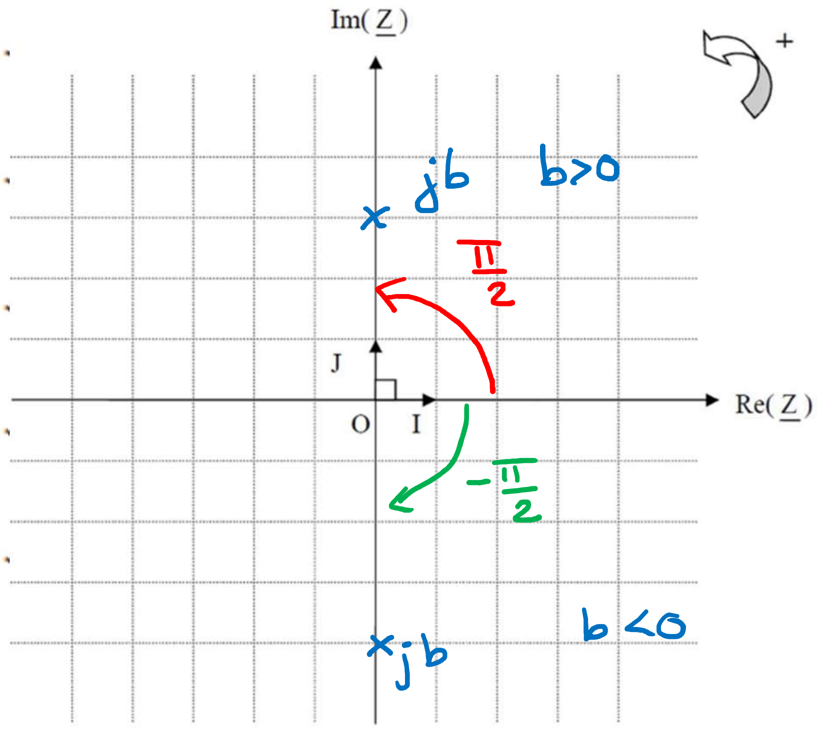
$$\arg(\underline{Z}) = \begin{cases} \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0 \\ \text{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Page 15 chapitre 2

<u>Remarque</u> : Que se passe-t-il si a = 0 ? $\underline{Z} = 0 + jb$

On ne peut pas utiliser la formule précédente.

$$\arg(jb) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } b < 0 \end{cases}$$



Page 17 chapitre 2

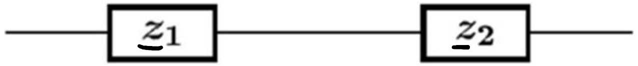
III. Application au GEII

Soient les deux nombres complexes : $\underline{z}_1 = \mathbf{1} + j\mathbf{3}$ et $\underline{z}_2 = \mathbf{2} + j\mathbf{4}$.
Calculer le module, l'argument, la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $\underline{z}_1 + \underline{z}_2$ En génie électrique, ce calcul correspond à calculer l'impédance équivalente de deux impédances montées en série ($\underline{z}_{eq} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2$).

$|a+jb| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\arg(a+jb) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a>0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi & \text{si } a<0 \end{cases}$



$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = \underbrace{3}_{>0} + 7j$

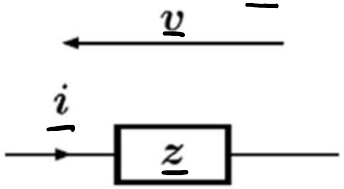
module de $\underline{Z}_{eq}$: $Z_{eq} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

$\arg(\underline{Z}_{eq}) = \arctan\left(\frac{Im(\underline{Z}_{eq})}{Re(\underline{Z}_{eq})}\right) = \arctan\left(\frac{7}{3}\right)$

$Re(\underline{Z}_{eq}) = 3$ $\quad Im(\underline{Z}_{eq}) = 7$

Page 17&18 chapitre 2

2. $\underline{z_1}.\underline{z_2}$ Cela correspond par exemple à calculer en régime sinusoïdal établi, la tension complexe $\underline{v}$ aux bornes d'une impédance $\underline{z} = 1 + 3j$ traversée par un courant $\underline{i} = 2 + 4j$ ($\underline{v} = \underline{z}.\underline{i}$).



Méth 1

$$\underline{z}.\underline{i} = (1+3j)(2+4j)$$

$$= 2+4j+6j+\underbrace{12j^2}_{-12}$$

$$\underline{v} = \underline{z}.\underline{i} = \overset{<0}{-10} + 10j$$

* $v = \sqrt{10^2+10^2} = \sqrt{200} = \sqrt{2}\sqrt{100} = 10\sqrt{2}$

* $\arg(\underline{v}) = \arctan\left(\frac{10}{-10}\right) + \pi = \arctan(-1)+\pi = \frac{-\pi}{4}+\pi$

$\arg(\underline{v}) = \frac{3\pi}{4}$

* $Re(\underline{v}) = -10$

* $Im(\underline{v}) = 10$

Méth 2

$v = |\underline{z}.\underline{i}| = |\underline{z}|.|\underline{i}| = z.i$

* $v = |1+3j| \times |2+4j| = \sqrt{1^2+3^2} \times \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{10}\times\sqrt{20}$

$v = \sqrt{10}\times\sqrt{2}\times\sqrt{10} = 10\sqrt{2}.$

* $\arg(\underline{v}) = \arg(\underline{z}.\underline{i}) = \arg(\underline{z}) + \arg(\underline{i})$

$\arg(\underline{v}) = \arg(\underset{>0}{1}+3j) + \arg(\underset{>0}{2}+4j)$

$= \arctan\left(\frac{3}{1}\right) + \arctan\left(\frac{4}{2}\right)$

$\arg(\underline{v}) = \arctan 3 + \arctan 2 = \frac{3\pi}{4}.$

* $Re(\underline{v}) = v\cos(\arg(\underline{v})) = 10\sqrt{2}.\cos(\arctan 3+\arctan 2) = -10$

* $Im(\underline{v}) = 10\sqrt{2}.\sin(\arctan 3+\arctan 2) = 10.$

2) Produit de deux nombres complexes (Comme $e^{a}.e^{b} = e^{a+b}$ il est préférable d'utiliser l'écriture exponentielle/polaire le plus possible)

$j\theta + j\theta'$

$$\underline{Z}.\underline{Z'} = Ze^{j.\theta}.Z'e^{j.\theta'} = \underbrace{Z.Z'}_{\text{module}}e^{j\underbrace{(\theta+\theta')}_{\text{arg.}}}$$ on en déduit que :

$\arg(\underline{Z}.\underline{Z'}) = \arg(\underline{Z}) + \arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $\mathbf{k \in \mathbb{Z}}$, **et** $|\underline{Z}.\underline{Z}'| = |\underline{Z}|.|\underline{Z}'|$

$[Z, \theta] \times [Z', \theta'] = [ZZ', \theta + \theta']$

Le module d'un produit de nombres complexes est le produit des modules, l'argument d'un produit de nombres complexes est la somme des arguments (à 2kπ près)

3. $\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}$. Cela correspond à calculer le courant $\underline{i}$ qui traverse une impédance $\underline{z} = \mathbf{2+4j}$ ayant une tension $\underline{v} = \mathbf{1+3j}$ à ses bornes $\left(\underline{i} = \frac{\underline{v}}{\underline{z}}\right)$.

Page 18 chapitre 2

Méth 1

$\underline{i} = \frac{\underline{v}}{\underline{z}} = \frac{1+3j}{2+4j} \times \frac{2-4j}{2-4j}$

$(A+B)\times(A-B) = A^2-B^2$

$(2+4j)(2-4j) = 2^2-(4j)^2 = 4+16$

$\underline{i} = \frac{14+2j}{2^2+4^2}$

$$\boxed{\begin{array}{l}(x+jy)(x-jy) = x^2+y^2 \\ (x+jy)(x-jy) = |x+jy|^2\end{array}}$$

$\underline{i} = \frac{14+2j}{20} = \frac{2(7+j)}{2\times 10}$

$\underline{i} = \frac{7+j}{10} = \frac{7}{10} + j\frac{1}{10}$

* $|\underline{i}| = \sqrt{\frac{49}{100}+\frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
* $\arg(\underline{i}) = \arctan\left(\frac{1/10}{7/10}\right) = \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$
* $Re(\underline{i}) = \frac{7}{10}$
* $Im(\underline{i}) = \frac{1}{10}$

Méth 2

$|\underline{i}| = \left|\frac{\underline{v}}{\underline{z}}\right| = \frac{|\underline{v}|}{|\underline{z}|} = \frac{v}{z}$

* $|\underline{i}| = \frac{|1+3j|}{|2+4j|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
* $\arg(\underline{i}) = \arg\left(\frac{\underline{v}}{\underline{z}}\right) = \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{z})$

$\arg(\underline{i}) = \arg\left(\frac{1+3j}{2+4j}\right) = \arg(1+3j) - \arg(2+4j)$

$\arg(\underline{i}) = \arctan\left(\frac{3}{1}\right) - \arctan(2)$

* $Re(\underline{i}) = i\cos(\arctan 3 - \arctan 2) = 0,7$
* $Im(\underline{i}) = i\sin(\arctan 3 - \arctan 2) = 0,1$

Page 16 chapitre 2

3) Quotient (Rappel : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ on utilisera l'écriture exponentielle/polaire si possible)

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}} = \frac{Ze^{j.\theta}}{Z'e^{j.\theta'}} = \frac{Z}{Z'}e^{j(\theta-\theta')}$$ on en déduit que :

module

$\arg\left(\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}}\right) = \arg(\underline{Z}) - \arg(\underline{Z}') + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et $\left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z'}}\right| = \frac{|\underline{Z}|}{|\underline{Z'}|}$

$\frac{[Z,\theta]}{[Z',\theta']} = [\frac{Z}{Z'}, \theta - \theta']$

Le module d'un quotient de nombres complexes est le quotient des modules, l'argument d'un quotient de nombres complexes est la soustraction des arguments (à 2kπ près)