

Nom : Prénom : Groupe :

Ce test et sa correction vous permettront d'identifier, si tel est le cas, vos lacunes en Mathématiques. Il sera noté. Les calculatrices sont interdites. La question 11 ne compte pas dans la note finale (poursuites d'études).

Question 1 Puissances

a) Ecrire les nombres suivants en notation scientifique : (rappel : $0,03 = 3 \times 10^{-2}$ en notation scientifique)

$$A = 7 \times 5^2 \times 10^5 \times 2^2 = 7 \times 10^5 \times 10^2 = 7 \times 10^7$$

$$B = (-2 \times 10^3)^2 = (-2)^2 \times (10^3)^2 = 4 \times 10^6$$

$$C = \frac{10^7}{(2^3 \times 5^3)^2} = \frac{10^7}{(10^3)^2} = \frac{10^7}{10^6} = 10$$

b) Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = 7a^3 \times a^4 = 7a^7$$

$$B = 4b^2 - (3 \cdot b)^2 = 4b^2 - 9b^2 = -5b^2$$

$$C = (c^4)^3 \times c^{-5} = c^{12} \times c^{-5} = c^7$$

Question 2 Fractions

a) Les nombres a, b, c, d, y et z étant non nuls, complétez les formules suivantes :

$$\frac{d}{c} + \frac{b}{a} = \frac{da+bc}{ac}$$

$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{a} = \frac{cb}{ad}$$

$$\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{y} \times \frac{1}{z} = \frac{x}{yz}$$

b) Simplifiez les nombres et les expressions suivantes :

$$A = \frac{14}{\frac{2}{15}} = 14 \times \frac{15}{2} = 7 \times 15 = 105$$

$$B = \frac{3^2}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3 \times 5}{5 \times 2 \times 3} = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{x}{4} + \frac{3}{10} = \frac{5x}{5 \times 4} + \frac{6}{2 \times 10} = \frac{5x+6}{20}$$

$$D = \frac{\frac{4ab^2}{8c}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{ab^2}{c} \times \frac{2}{a^2} = \frac{2ab^2}{a^2c} \text{ avec } a, c \neq 0$$

Evaluation : A = Notion maîtrisée, B = Notion à revoir, C = Notion à travailler d'urgence

Question 3 Racines carrées : Simplifiez A au maximum, et faites disparaître les racines carrées du dénominateur de B.

$$A = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{3} \times \sqrt{6} \dots 6\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6 \times 6 = 36$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}+\sqrt{x} \dots \text{où } x \geq 0$$

(Handwritten notes: A+B, A²-B²)

Question 4 Identités remarquables

a) Développez les formules suivantes :

$$(Z - t)(Z + t) = Z^2 - t^2$$

$$(X - Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$$

b) Factorisez l'expression suivante :

$$R^2 + T^2 - 2TR = (R - T)^2$$

c) Développez A, factorisez B et simplifiez C :

$$A = (5 - 2t)^2 = 25 - 2 \times 5 \times 2t + 4t^2 = 25 - 20t + 4t^2$$

$$B = 3(R^2 - 1) - (R + 1) = \underbrace{3(R-1)(R+1)}_{3R-3} - (R+1) = (R+1)(3R-3-1) = (R+1)(3R-4)$$

$$C = \frac{(2z+4)(3z+2)}{(z+2)} = \frac{2(z+2)(3z+2)}{z+2} = 2(3z+2) \dots \text{avec } z \neq -2$$

Question 5 Résolvez les équations et inéquations suivantes :

a) $9R - 3 = -2 + 2R \Leftrightarrow 7R = 1 \Leftrightarrow R = 1/7$

$$S = \{1/7\}$$

b) $3X^2 + X - 2 = 0 \dots \Delta = 1^2 - 4(3)(-2) = 25 > 0$

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ X_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{6} = -1 \end{aligned} \right. \quad S = \left\{ -1, \frac{2}{3} \right\}$$

c) $5 - 3t \leq -2t + 4 \Leftrightarrow -t \leq -1 \Leftrightarrow t \geq 1$

$$S = [1; +\infty[$$

d) $3X^2 + X - 2 > 0$ (Reprendre les résultats de l'équation b))

X	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
Signe de $3x^2+x-2$	+	0	-	+

$$S =]-\infty, -1[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$$

Question 6 Trigonométrie

a) Complétez les formules suivantes :

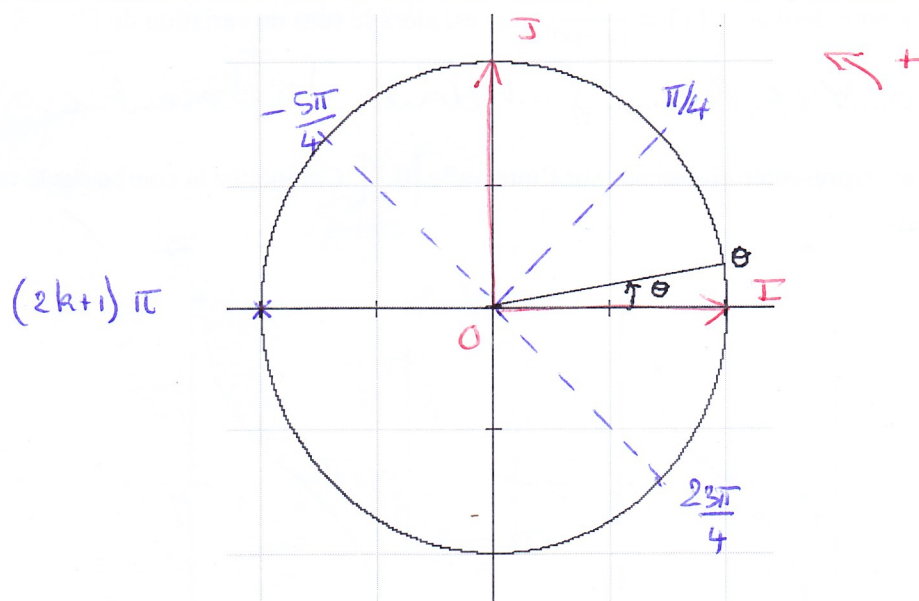
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

b) Complétez le cercle trigonométrique ci-dessous, placez sur ce dernier les angles suivants : $\frac{\pi}{4}$;

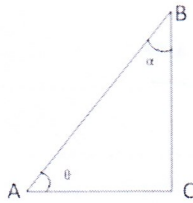
$-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{4}$; $(2k+1)\pi$ où k est un entier relatif ; puis complétez le tableau ci-dessous :

θ	$(2k+1)\pi$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$\frac{23\pi}{4}$
$\sin \theta$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos \theta$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan \theta$	0	1	-1	-1



$$\frac{23\pi}{4} = \frac{24\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 6\pi - \frac{\pi}{4}$$

c) Soit ABC le triangle rectangle en C, tel que l'angle $\theta = \widehat{CAB}$ vaut $\frac{\pi}{6}$ radians et $AC = \sqrt{3}$



En déduire les valeurs de AB, puis de CB :

AB? $\cos \theta = \frac{AC}{AB} \Leftrightarrow AB = \frac{AC}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$

CB? $\sin \theta = \frac{CB}{AB} \Leftrightarrow CB = AB \cdot \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

La valeur de l'angle $\theta = \widehat{CAB}$ en degré est : $\frac{180}{6} = 30^\circ$

La valeur de l'angle $\alpha = \widehat{CBA}$ en degré est : $180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$

6

Question 7 Etude de fonctions

Soit f, la fonction définie par : $f(x) = \tan x$

a) Quel est l'ensemble de définition de f ? $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$

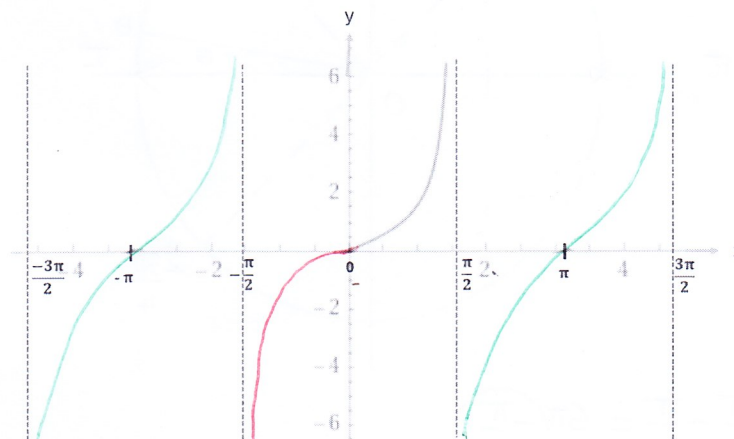
b) La fonction f est-elle paire ? impaire ? f est impaire

c) La fonction f est périodique, quelle est sa période ? $T = \pi$

d) La fonction f a pour dérivée $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, quel est alors le sens de variation de f ?

$f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ f est donc strictement croissante

e) La fonction f est représentée ci-dessous sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Complétez la courbe sur le reste du schéma ci-dessous.



f) Que peut-on dire des droites d'équations : $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{-3\pi}{2}$; $x = \frac{-\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$?

..... Ces droites sont asymptotes à la courbe représentant f .

Question 8 Exponentielle et Logarithme

Soit Log, la fonction « logarithme décimal » définie par : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \forall x > 0$. Déterminez et simplifiez :

$\log(1) = \frac{\ln 1}{\ln 10} = 0$ $\log(10) = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$

$\log(10^2) = \frac{\ln 10^2}{\ln 10} = \frac{2 \ln 10}{\ln 10} = 2$ $\log(10000) = \frac{\ln 10^4}{\ln 10} = \frac{4 \ln 10}{\ln 10} = 4$

$\log(10^n) = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$ pour tout entier naturel n .

Soit A et B, deux nombres réels strictement positifs,

$\log(A.B) = \frac{\ln(A.B)}{\ln 10} = \frac{\ln A + \ln B}{\ln 10} = \frac{\ln A}{\ln 10} + \frac{\ln B}{\ln 10} = \log A + \log B$

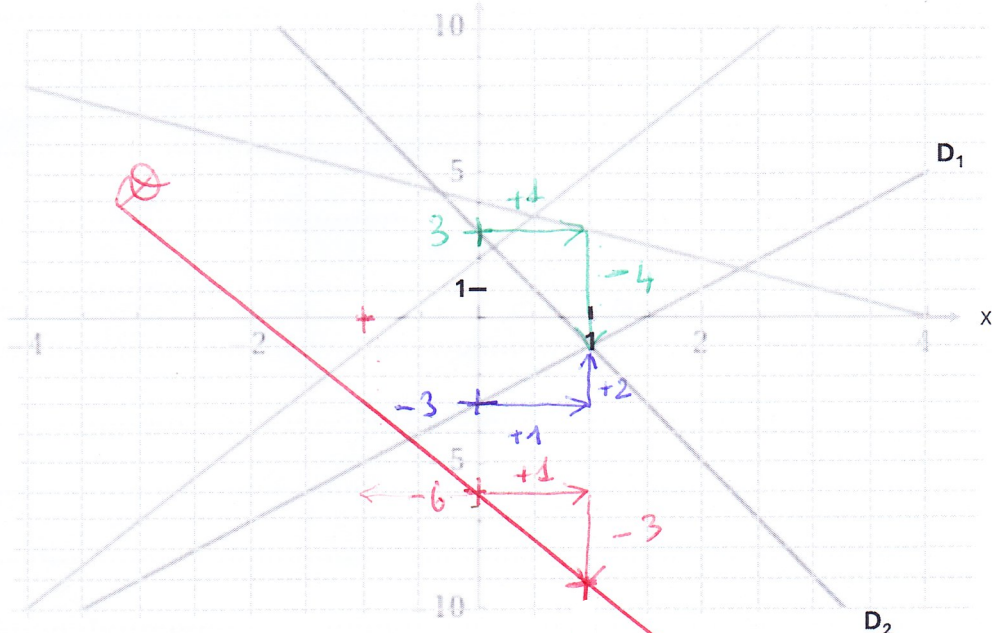
Question 9 Equation de droites

Les droites D_1 et D_2 sont tracées ci-dessous. Complétez :

La droite D_1 a pour équation : $y = 2x - 3$

La droite D_2 a pour équation : $y = -4x + 3$

Puis, tracez sur la même figure ci-dessous, la droite d'équation : $D : y = -3x - 6$



Question 10 Résolvez le système suivant : $\begin{cases} 10x - 2y = 9 & \times 1 & | & \times 4 \\ -8x + y = -1 & \times 2 & | & \times 5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 10x - 2y = 9 \\ -16x + 2y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40x - 8y = 36 \\ -40x + 5y = -5 \end{cases}$$

$$-6x = 7$$

$$x = -\frac{7}{6}$$

$$-3y = 31$$

$$y = -\frac{31}{3}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{7}{6}, -\frac{31}{3} \right) \right\}$$

Question 11 ne compte pas dans la note finale (poursuites d'études).

- 1) Calculer les valeur moyenne et efficace du signal $f(t) = 5 \cdot \sin(3t)$. On rappelle les formules :

La **valeur moyenne** d'une fonction intégrable et T-périodique f, est la valeur donnée par : $\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(t) dt$ où a est un nombre réel quelconque. La **valeur efficace** de f est la racine carré de la valeur moyenne de f^2 :

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f^2(t) dt}$$

- 2) Résoudre l'équation : $2 \cdot e^{2x} - e^x - 3 = 0$

$$\textcircled{1} \quad T = \frac{2\pi}{3} \quad * \quad V_{moy} = \frac{1}{\frac{2\pi}{3}} \times \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 5 \sin(3t) dt = \frac{15}{2\pi} \times \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin(3t) dt$$

$$V_{moy} = \frac{15}{2\pi} \times \left[-\frac{\cos(3t)}{3} \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{15}{2\pi} \times (-\cos(2\pi) + \cos(0)) = 0$$

$$* \quad V_{eff}^2 = \frac{3}{2\pi} \times \int_0^{\frac{2\pi}{3}} 25 \sin^2(3t) dt = \frac{75}{4\pi} \times \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1 - \cos(6t)) dt$$

$$V_{eff}^2 = \frac{75}{4\pi} \times \left[t - \frac{\sin(6t)}{6} \right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{75}{4\pi} \times \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sin(4\pi)}{6} - 0 \right) = \frac{25}{2} =$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \left(= \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \right)$$

- ② On pose $X = e^x$ et on résout $2x^2 - x - 3 = 0$ car $(e^x)^2 = e^{2x}$

$$\Delta = 1 - 4(2)(-3) = 25$$

$$X_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

On résout alors $e^x = \frac{3}{2}$ et $e^x = -1$

$$\ln e^x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \left. \vphantom{\ln e^x} \right\} \text{ impossible}$$

$$x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$S = \left\{ \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right\}$$