Nom : .... Prénom : .... Groupe : ......

Durée : 1h30min. Calculatrice : Collège Documents : aucun Répondre sur le sujet
Le barème est approximatif

Exercice 1 Nombres complexes (8 pts)

1) Complétez le tableau ci-dessous :

$\underline{Z}$	$\text{Re}(\underline{Z})$	$\text{Im}(\underline{Z})$	Z	$\text{Arg}(\underline{Z})$	Autre écriture	$\underline{Z}^*$ exponentielle et algébrique
$5.e^{-j\frac{\pi}{3}}$	$5\cos(-\pi/3) = \frac{5}{2}$	$5\sin(-\pi/3) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$	5	$-\frac{\pi}{3}$	algébrique $\frac{5}{2} - j\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}$	$5e^{j\pi/3}$ $\frac{5}{2}+j\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2}$
$-1+j$	-1	1	$\sqrt{2}$	$\arctan(-1)+\pi = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$	exponentielle $\sqrt{2}.e^{3j\pi/4}$	$\sqrt{2}e^{-3j\pi/4}$ $-1-j$
$8.j.e^{j\frac{\pi}{3}}$ $= 8e^{j\pi/2}e^{j\pi/3} = 8^{5j\pi/6}$	$8\cos(\frac{5\pi}{6}) = 8.\frac{-\sqrt{3}}{2} = -4\sqrt{3}$	$8\sin(\frac{5\pi}{6}) = 8.\frac{1}{2} = 4$	8	$\frac{5\pi}{6}$	exponentielle $8e^{5j\pi/6}$	$8e^{-5j\pi/6}$ $-4\sqrt{3}-4j$

Dans les questions qui suivent : R, L, C et ω sont des nombres réels strictement positifs.

2) Déterminez le module et un argument de : $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \times \frac{j}{j}$

$\underline{Z} = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$\arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right) = \arctan\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega}\right)$

3) Déterminez le module et un argument de : $\underline{Z} = \frac{1}{jL\omega - R}$

$Z = \frac{1}{|jL\omega - R|} = \frac{1}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$

$\arg(\underline{Z}) = -\arg(-R + jL\omega) = -\arctan\left(\frac{L\omega}{-R}\right) \pm \pi$

$\arg(\underline{Z}) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) - \pi$

Exercice 2 : Trigonométrie (12 pts)

4) a) Complétez : Cos(2x) = $\cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x . \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Exprimez cos(2x) en fonction de $\cos^2(x)$: Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, alors $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et on obtient : $\cos(2x) = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1.$$

b) Résoudre alors l'équation : cos(2x) + cos(x) = 0

On applique la formule précédente et l'équation devient :

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

On pose $X = \cos x$ et on résout : $2X^2 + X - 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4(2)(-1) = 9 > 0$. $X_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$.

On résout alors : $\cos x = \frac{1}{2}$ et $\cos x = -1$

$\iff x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ $\iff x = \pi + 2k\pi$.

$S = \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,;\, \pi + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) a) Simplifier $\sin(3x + \frac{\pi}{4})$ = $\sin(3x) . \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{4} \cos(3x)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(3x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(3x) + \cos(3x)\right)$

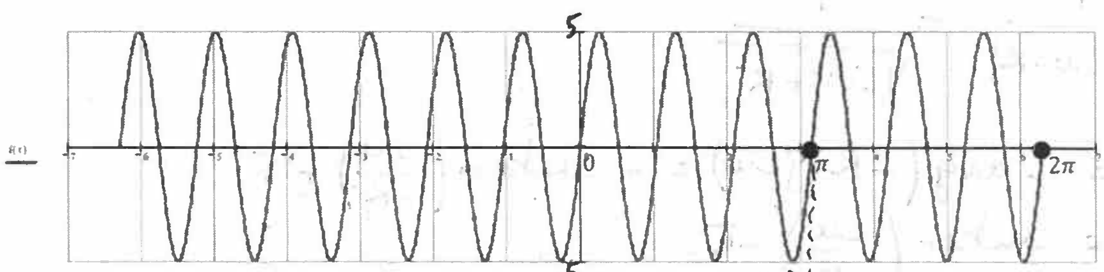
b) En déduire les solutions de l'équation suivante : sin(3x) + cos(3x) = 0

A l'aide de la formule précédente l'équation devient : $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\iff 3x + \frac{\pi}{4} = k\pi \iff 3x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \iff x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$

$S = \left\{ -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

3) Déterminer la fréquence, la pulsation, l'amplitude, puis l'expression de la fonction f, dont la représentation graphique est :



3 motifs.

L'axe des abscisses est l'axe du temps t en seconde.

$f = \frac{3}{\pi} \Longleftrightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6$ $A = 5$

$f(x) = 5.\sin(6x)$ ou encore $f(x) = 5.\cos(6x - \frac{\pi}{2})$

4) a) La fonction f, définie par : $f(x) = cos^4(x) + 2cos^3(x) + 5$ est-elle paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre ? Justifiez votre réponse.

$f(-x) = \cos^4(-x) + 2\cos^3(-x) + 5 = \cos^4 x + 2\cos^3 x + 5 = f(x)$ car $\cos(-x) = \cos x$.

la fonction f est donc paire.

b) La fonction g, définie par : $g(x) = cos^2(x) + sin^3(x)$ est-elle paire, impaire, ou ni l'un ni l'autre ? Justifiez votre réponse.

$g(-x) = \cos^2(-x) + \sin^3(-x) = \cos^2 x - \sin^3 x$ car $\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \end{cases}$

$-g(x) = -\cos^2 x - \sin^3 x$.

g est ni paire, ni impaire

On pourrait choisir un contre exemple :

$g(-\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$: $g(-\pi/4) \neq g(\pi/4)$

et $g(-\pi/4) \neq -g(\pi/4)$

5) On rappelle la formule de la valeur moyenne d'une fonction T-périodique : $V_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$
Calculer à l'aide d'une intégrale la valeur moyenne de la fonction u, définie par : $u(t) = 5.\sin(2t + \frac{\pi}{3})$
On déterminera d'abord la période de u :

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$

$V_m = \frac{1}{\pi} \times \int_0^{\pi} 5.\sin(2t + \frac{\pi}{3})\,dt = \frac{5}{\pi}\left[\frac{-\cos(2t+\frac{\pi}{3})}{2}\right]_0^{\pi}$

$V_{moy} = -\frac{5}{2\pi}\left(\underbrace{\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)}_{=\cos\frac{\pi}{3}} - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0$

6) a) Linéariser $\sin^2(\theta)$ en partant de la formule $\cos(2\theta)$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta$ car $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta \iff 2\sin^2\theta = 1 - \cos(2\theta) \iff \sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$

b) On rappelle la formule de la valeur efficace d'une fonction T − périodique :

$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}$

Calculer à l'aide d'une intégrale la valeur efficace de la fonction u, définie par : $u(t) = 5.\sin(2t + \frac{\pi}{3})$

On déterminera d'abord la période de u :

$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

$U^2_{eff} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 25\sin^2\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)dt = \frac{25}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos\left(4t+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}dt$

$U^2_{eff} = \frac{25}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\cos\left(4t+\frac{2\pi}{3}\right)\right)dt = \frac{25}{2\pi}\left[t - \frac{\sin\left(4t+\frac{2\pi}{3}\right)}{4}\right]_0^{\pi}$

$= \frac{25}{2\pi}\left(\pi - \underbrace{\frac{\sin\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}{4}}_{=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{4}} - \left(0 - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{4}\right)\right)$

$= \frac{25}{2\pi} \times \pi$

$U^2_{eff} = \frac{25}{2} \iff U_{eff} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.