Partie A : Rappels sur les propriétés et calculs de base

Théorèmes/Définitions/Notations :

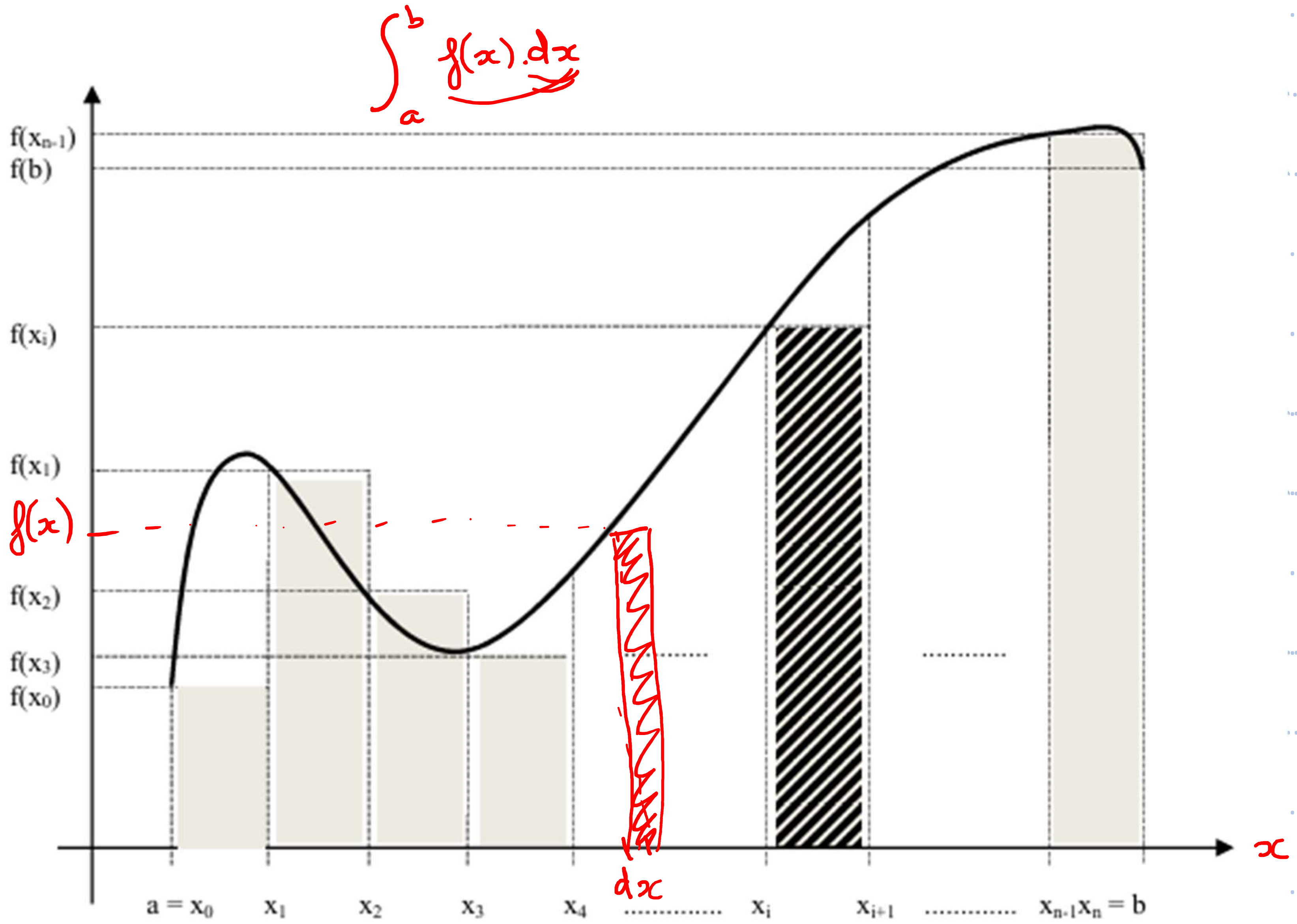
1) Toute fonction continue sur [a,b] est intégrable sur [a,b]
2) Soit f, une fonction intégrable sur [a,b]. On appelle fonction primitive de f sur [a,b] toute fonction notée F, définie par : F'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$.
3) On note $\int f(x)dx$ toutes les fonctions primitives de f, on a donc :

$$\int f(x)dx = F(x) + cte$$

4) Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Notes



$\int_a^b f(x).dx$
$f(x_{n-1})$
$f(b)$
$f(x_i)$
$f(x_1)$
$f(x)$
$f(x_2)$
$f(x_3)$
$f(x_0)$
x
dx
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
x_i
x_{i+1}
$x_{n-1}\, x_n = b$

Propriétés

1) Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors : $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

2) Relation de Chasles : Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I. Soit a,b,c trois réels de I. On a alors : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

3) $\boxed{\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt}$

4) Soit f et g, deux fonctions continues sur [a,b] telles que $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, on a alors : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Page 24 chapitre 1

Partie C : Calcul d'intégrales doubles

I. Généralités :

1) Domaine fermé de $\mathbb{R}^2$

Définition **On appelle domaine fermé de $\mathbb{R}^2$ tout domaine du plan délimité par une courbe fermée**

Exemples

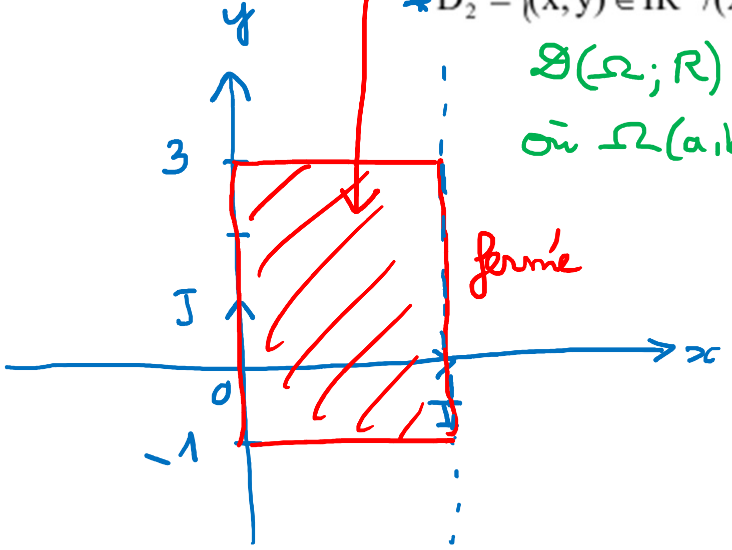
* $D_1 = [0;1]\times[-1;3] = \{(x,y)\in IR^2 / x\in[0;1] \text{ et } y\in[-1;3]\}$

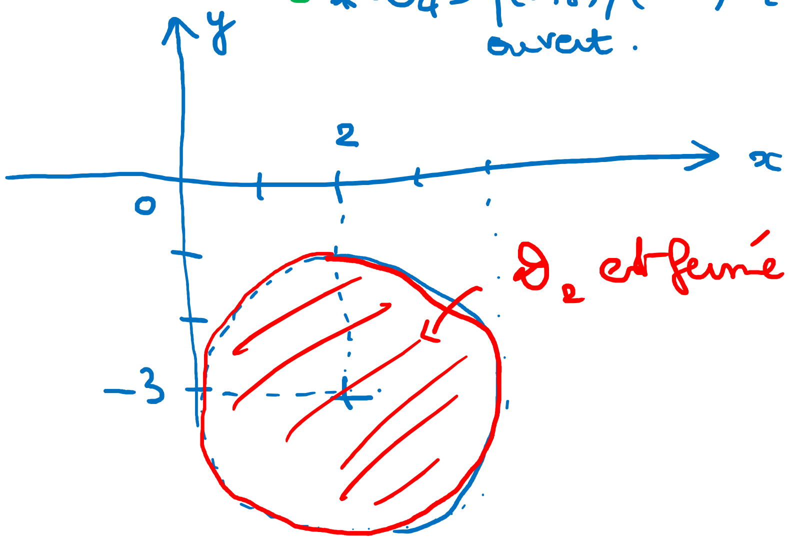
* $D_2 = \{(x,y)\in IR^2 / (x-2)^2+(y+3)^2\le 4\} = \mathcal{D}(\Omega;2)$ où $\Omega(2;-3)$.

$\mathcal{D}(\Omega;R) = \{(x,y) / (x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2\}$ où $\Omega(a,b)$

* $\mathcal{D}_3 = [0;1[\times[-1;3]$ est ouvert

* $\mathcal{D}_4 = \{(x,y) / (x-2)^2+(y+3)^2 < 4\}$ est ouvert.

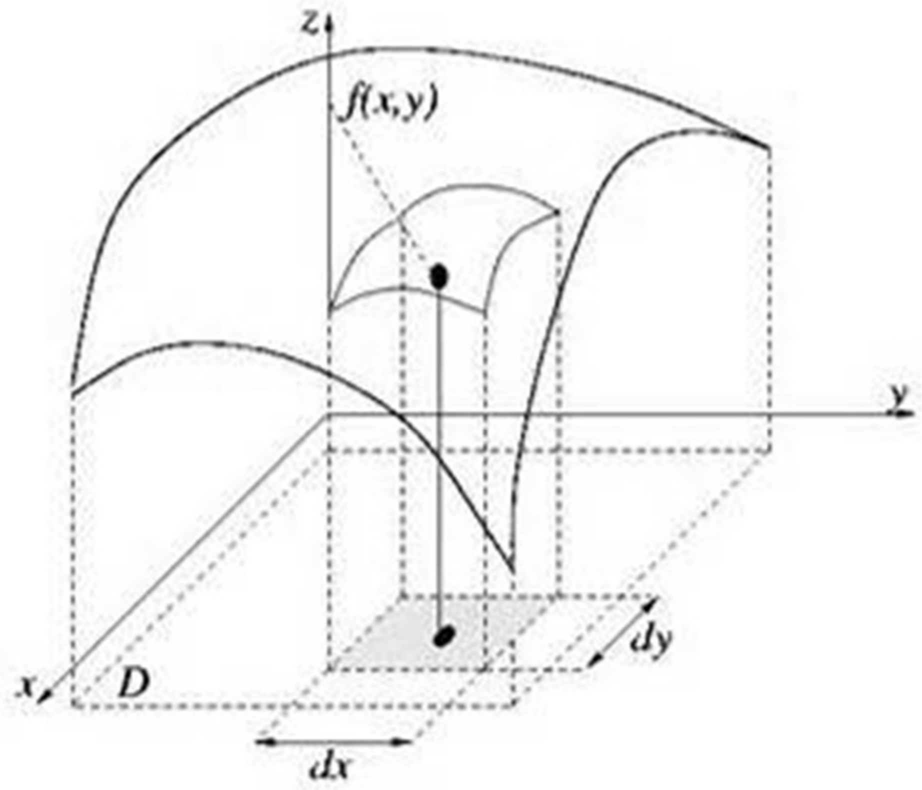




Page 24 chapitre 1

2) Intégrale double

Définition/théorème **Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. Alors l'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ existe.**



3) Applications

- Si $f(x,y)=1\ \forall (x,y)\in D$, alors $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ représente l'aire du domaine D.
- Si f(x,y) est la masse surfacique au point M(x,y) du domaine D, alors $I=\iint_D f(x,y)\,dxdy$ est la masse du domaine D.
- Soit A, l'aire du domaine D. Les coordonnées du centre de gravité G de D sont données par les intégrales : $x_G=\dfrac{1}{A}\iint_D x\,dxdy$ et $y_G=\dfrac{1}{A}\iint_D y\,dxdy$

4) Propriétés

Soient D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$; f et g, deux fonctions continues sur D ; α et β deux nombres réels.

- Si $f(x,y)\geq 0\ \forall(x,y)\in D$, alors $\iint_D f(x,y)\,dxdy \geq 0$

- $\iint_D (\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\,dxdy=\alpha\iint_D (f(x,y)dxdy+\beta\iint_D g(x,y)\,dxdy$

- Si $D=D_1\cup D_2$ où D_1 et D_2 sont deux domaines fermés de $\mathbb{R}^2$ et disjoints ($D_1\cap D_2=$ Ø) alors : $\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

II. Calcul d'une intégrale double en coordonnées cartésiennes :

Page 25 chapitre 1

Théorème de Fubini Soit f, une fonction continue dans D, un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. On peut calculer l'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ en intégrant soit d'abord par rapport à la variable x, soit d'abord par rapport à la variable y :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dydx$$

1) 1^{er} cas : D est un domaine fermé rectangulaire de $\mathbb{R}^2$

Exemple Calculer $I = \iint_D (x+y)\,dxdy$ où $D = \underset{x}{[0;2]} \times \underset{y}{[0;1]}$

ou $dydx$

$$I = \int_0^1 \int_0^2 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^1 \left(\overset{2}{\overset{\shortparallel}{\frac{4}{2}}} + 2y - 0\right) dy = \left[2y + y^2\right]_0^1 = 3$$

$$I = \int_0^2 \int_0^1 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} - 0\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 3$$

Application du théorème de Fubini

$$\iint_{\underset{x}{[a,b]} \times \underset{y}{[c,d]}} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx$$

Page 26 chapitre 1

Cas particulier : Calculer $I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy$ lorsque $\underbrace{f(x,y) = g(x)h(y)}$

" f est à variables séparables "

$$I = \int_c^d \int_a^b g(x)\underbrace{h(y)}_{\text{cte}/x}\,dx\,dy$$

$$I = \int_c^d h(y) \cdot \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{\text{cte}}\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \times \int_c^d h(y)\,dy.$$

① fct° à var. séparable

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)\cdot h(y)\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx \times \int_c^d h(y)\,dy$$

② Rectangle

$$\ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right) \quad A,B>0$$

Exemple $I = \iint_{[0,\pi]\times\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]} \underbrace{\sin(3x).\tan(y)}\,dxdy$

est à variables séparables. ①

domaine rectangle ②

$$I = \int_0^{\pi} \sin(3x)\,dx \times \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan(y)\,dy = \left[-\frac{\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi} \times \Big[-\ln|\cos y|\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{1}{3}\Big(-\overbrace{\cos 3\pi}^{-1} + \overbrace{\cos 0}^{1}\Big) \times \Big(-\ln \overbrace{\cos\tfrac{\pi}{3}}^{1/2} + \ln \underbrace{\cos\tfrac{\pi}{6}}_{\sqrt{3}/2}\Big)$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$I = \frac{2}{3}\ln 3^{1/2} = \boxed{\frac{1}{3}\ln 3}$$

$$-\int -\tan y\,dy = -\int \frac{\sin y}{\cos y}\,dy = -\int \frac{U'}{U}\,dy = -\ln|U| + \text{cte} \longrightarrow U = \cos y \Rightarrow U' = -\sin y$$

Page 26 chapitre 1

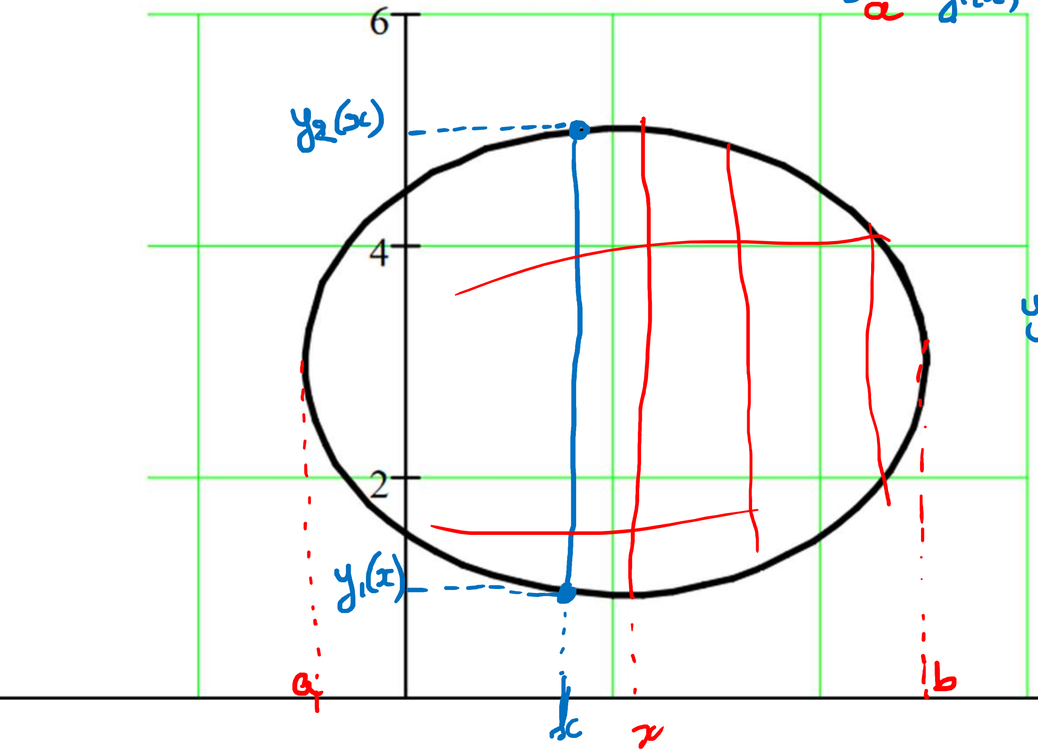
D'après le théorème de Fubini, on peut calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ soit :

a) <u>En intégrant d'abord par rapport à la variable y</u>

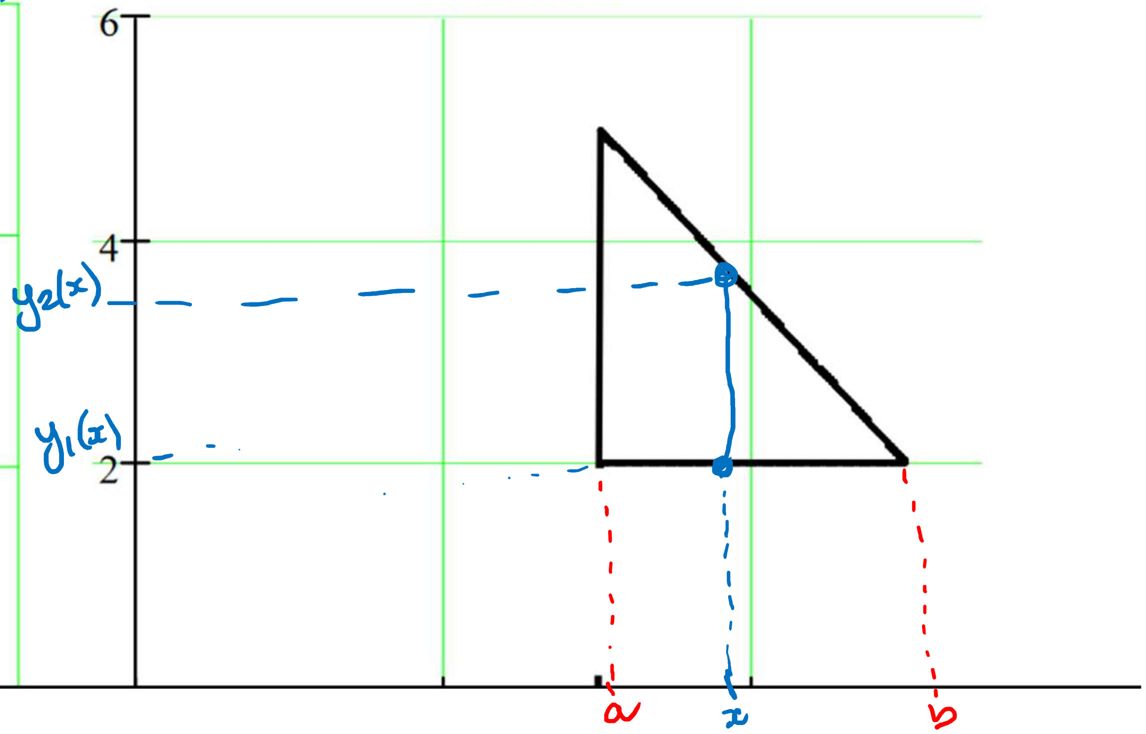
On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Oy) coupe la courbe délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Domaine D

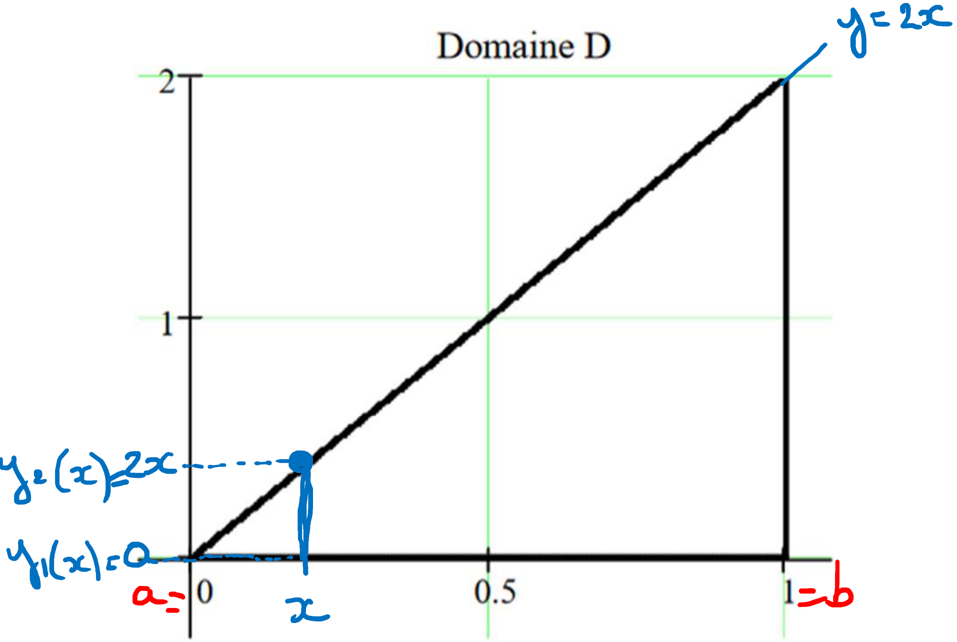


Domaine D



Page 27 chapitre 1

<u>Exemple</u> Calculer $I = \iint_D xy^2 \, dxdy$ où D est le domaine représenté ci-dessous :



$$I = \int_0^1 \int_0^{2x} xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 x . \int_0^{2x} y^2 dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{2x} dx = \int_0^1 x \left(\frac{8x^3}{3} - 0 \right) dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{8x^4}{3} dx = \frac{8}{3} \int_0^1 x^4 dx = \frac{8}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{3} \left(\frac{1}{5} - 0 \right)$$

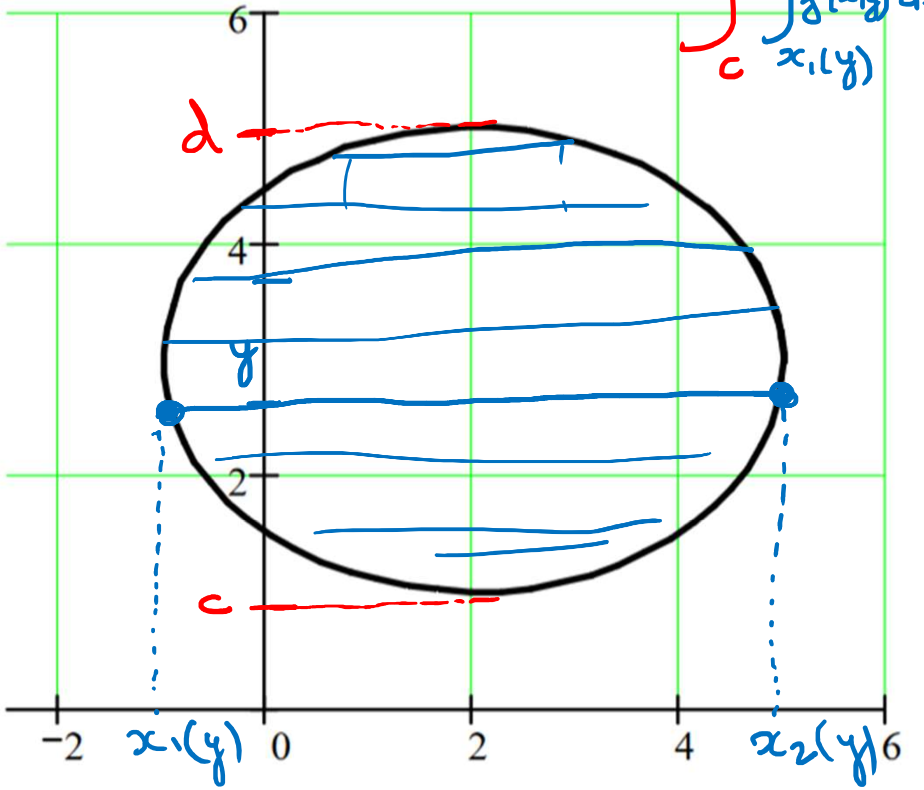
$$I = \frac{8}{15}.$$

b) <u>En intégrant d'abord par rapport à la variable x</u>

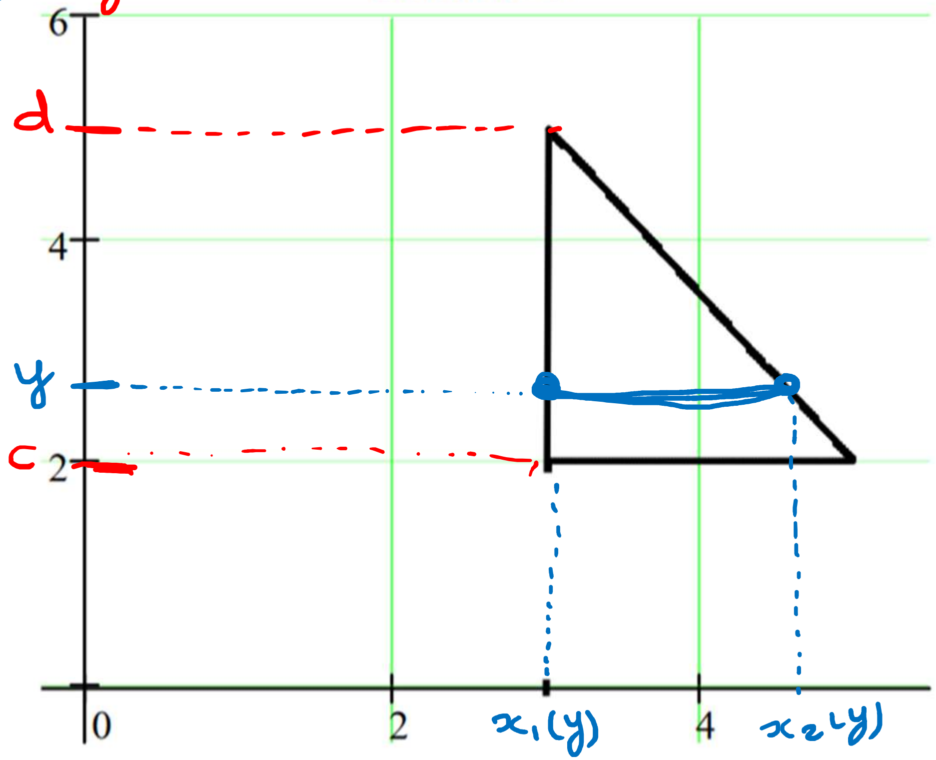
On suppose alors que toute parallèle à l'axe (Ox) coupe la courbe délimitant D en au plus deux points ou en une infinité de points :

$$\int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Domaine D

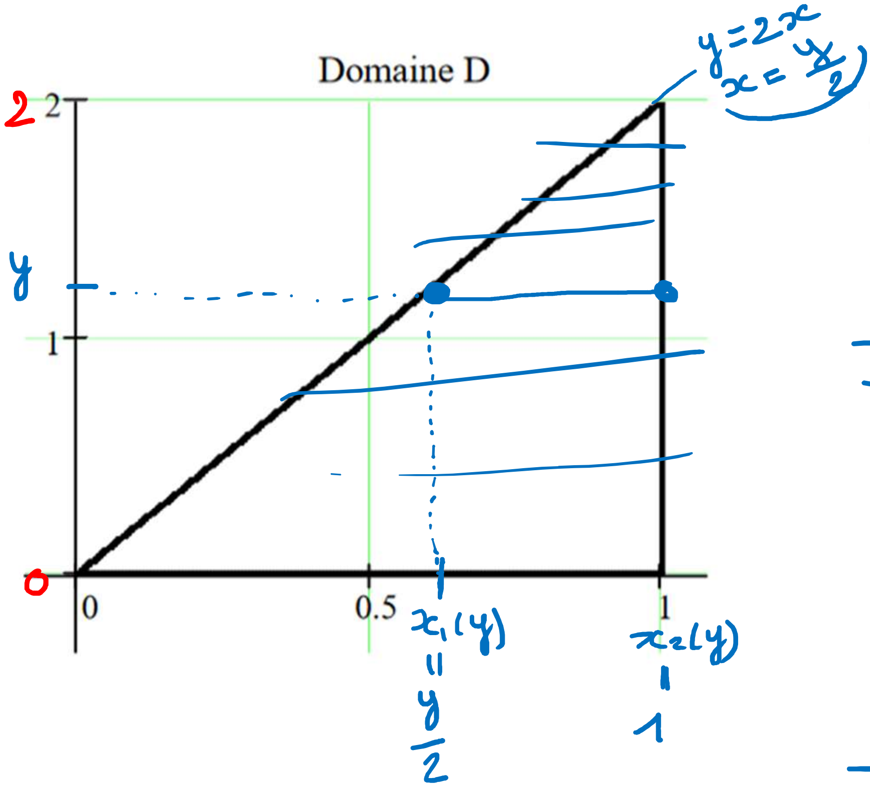


Domaine D



<u>Exemple</u> Calculer $I = \iint_D xy^2 \, dxdy$ où D est le domaine représenté ci-dessous :

$$\frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2} = \frac{\frac{y^2}{4}}{2} = \frac{y^2}{8}$$



$$I = \int_0^2 \int_{y/2}^1 xy^2 \, dx \, dy = \int_0^2 y^2 \int_{y/2}^1 x \, dx \, dy$$

$$I = \int_0^2 y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y/2}^1 dy = \int_0^2 y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2}\right) dy$$

$$I = \int_0^2 y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{8}\right) dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8}\right) dy$$

$$I = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{40}\right]_0^2 = \frac{2^3}{6} - \frac{2^5}{40} - 0 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}$$

3) Exercices

Page 29 chapitre 1

Exercice 1 Calculer l'intégrale double : $\iint_D xy\,dx\,dy$ avec successivement :

$D_1 = \{(x,y) \,/\, 2 \geq x \geq 0 \,,\; 3 \geq y \geq -2\}$

D_2 est le plan limité par les paraboles d'équations $y=x^2$ et $x=y^2$.

$$I_1 = \iint_{D_1} xy\,dx\,dy$$

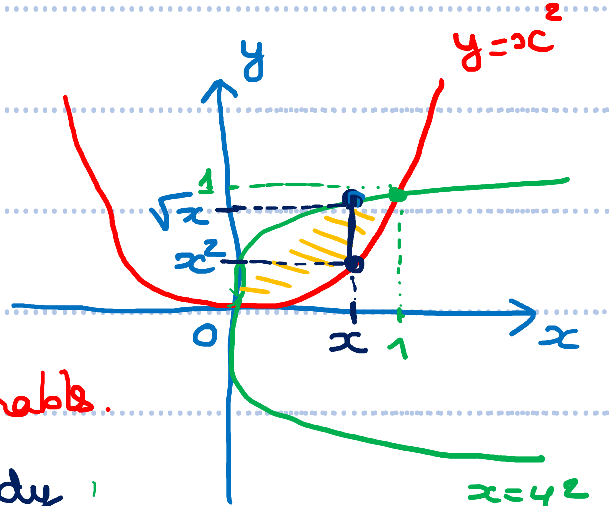
Méth 1 : $I_1 = \int_{-2}^{3} \underbrace{\int_0^2 xy\,dx}\,dy = \int_{-2}^{3} y \cdot \underbrace{\int_0^2 x\,dx}\,dy$

$$I_1 = \int_{-2}^{3} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 dy = \int_{-2}^{3} y\cdot\underbrace{\left(\frac{4}{2}-0\right)}_{2} dy$$

$$= 2\times\int_{-2}^{3} y\,dy = 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^{3} = 2\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = 2\times\frac{5}{2} = 5$$

$$I_2 = \iint_{D_2} xy\,dx\,dy.$$

$$I_2 = \int_0^1 \underbrace{\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy}\,dx$$



$x=y^2$

$y=\sqrt{x}$

à var. séparable.

Méth 2 : $I_1 = \iint_{[0,2]\times[-2,3]} xy\,dx\,dy$ ← Rectangle

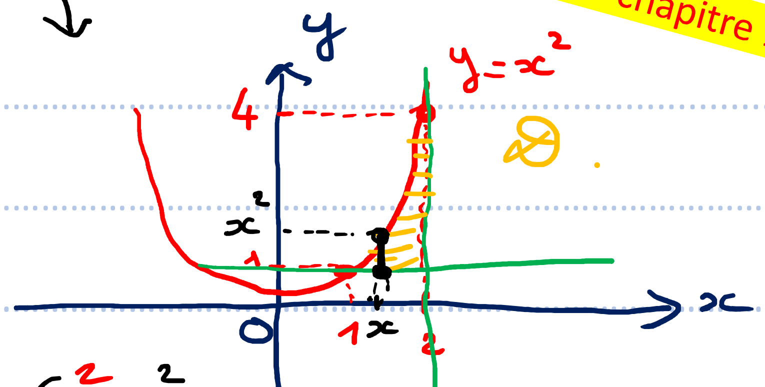
Cas Particulier p.26

$$= \int_0^2 x\,dx \times \int_{-2}^{3} y\,dy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \times \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-2}^{3} = 5$$

__Exercice 2__ Tracer le domaine D du plan limité par les courbes $y=x^2$, $x=2$, $y=1$; puis calculer

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

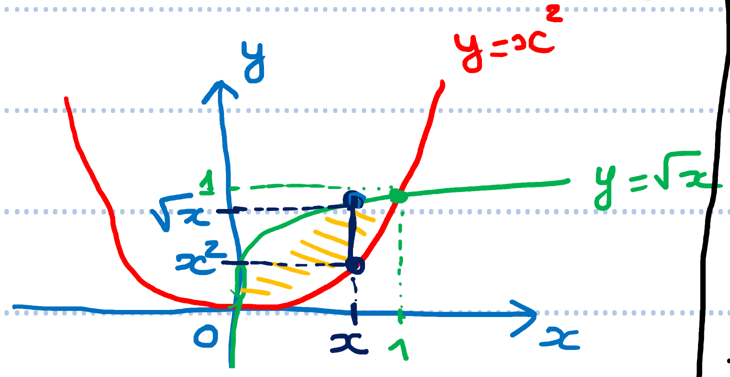
Page 29 chapitre 1



$$I=\int_1^2\int_1^{x^2}(x^2+y^2)\,dy\,dx=\frac{1006}{105}$$

$$I_2=\iint_{D_2} xy\,dx\,dy\,.$$

$$I_2=\int_0^1\underbrace{\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy}\,dx$$



$$I_2=\int_0^1 x\cdot\underbrace{\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy}\,dx$$

$$=\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=\int_0^1 x\left(\frac{x}{2}-\frac{x^4}{2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}.$$

Notes

$$* \quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi^{-1}(t))\,\psi'(t)\,dt}$$

$$t = \varphi(x) \iff x = \varphi^{-1}(t) = \psi(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = \psi'(t)$$

$$dx = \psi'(t)\,dt$$

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x + \ln x - 5}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{t^3+t-5}{e^t}\,e^t\,dt = \int_0^1 (t^3+t-5)\,dt = \left[\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-5t\right]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-5$$

$$t = \ln x \iff \boxed{x = e^t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = (e^t)' = e^t \iff dx = e^t\,dt$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = e \end{cases} \iff \begin{cases} t = \ln 1 = 0 \\ t = \ln e = 1 \end{cases}$$

val. absolue — déterminant.

$$\left|\,\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\,\right|$$

$$* \quad \boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta f\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)\,|\mathrm{Jac}|\,du\,dv}$$

$$x = x(u,v)$$
$$y = y(u,v)$$

Page 29 chapitre 1

III. Changement de variables

1) Définitions

Changement de coordonnées : Soit Δ et D deux domaines fermés de $\mathbb{R}^2$. On appelle transformation de Δ dans D toute fonction vectorielle bijective

$$\varphi : \Delta \to D$$
$$(u,v) \mapsto (x,y) = \varphi(u,v)$$

Jacobien : $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Si les fonctions numériques $(u,v) \mapsto x(u,v)$ et $(u,v) \mapsto y(u,v)$ admettent des dérivées partielles continues sur Δ (i.e φ est de classe C^1), alors on appelle Jacobien de φ et on note $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ le déterminant défini par :

$$\begin{array}{cc} x'_u & x'_v \end{array}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

$$\begin{array}{cc} y'_u & y'_v \end{array}$$

Remarque φ étant bijective, φ^{-1} existe. φ^{-1} est alors une transformation de D en Δ. Le jacobien de φ^{-1} noté $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$, et donc l'inverse du jacobien de φ.

2) Calcul d'une intégrale double par changement de variables

Page 30 chapitre 1

Soit f une fonction continue sur D un domaine fermé de $\mathbb{R}^2$. Soit φ une transformation de Δ en D de classe C^1 : $\begin{array}{l}\varphi : \Delta \to D \\ (u,v) \mapsto (x,y) = \varphi(u,v)\end{array}$.

valeur absolue.

On obtient alors : $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v)) \underbrace{\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|} dudv$

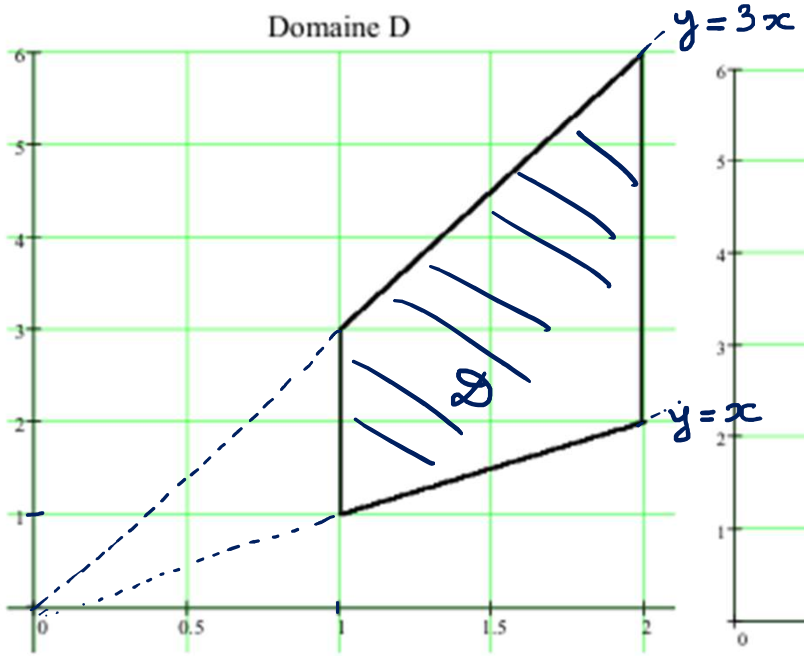
Notes

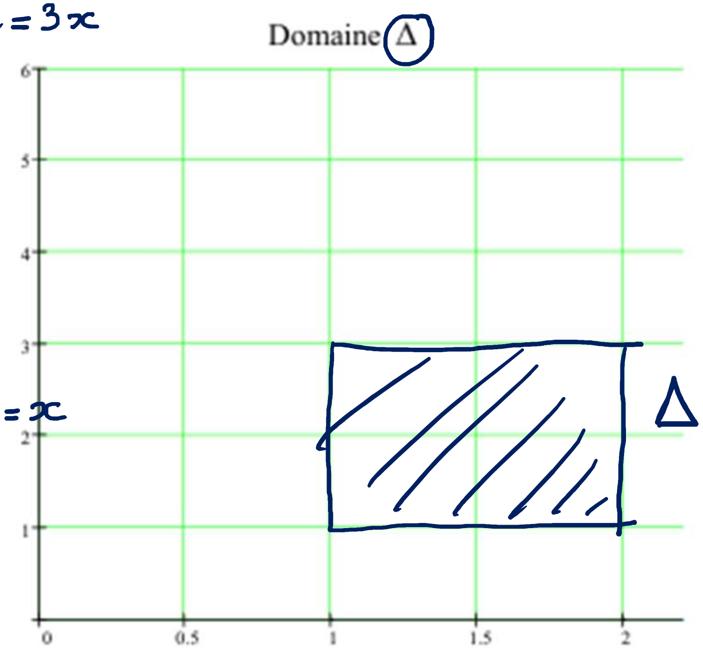
<u>Exemple</u> Calculer l'intégrale $I = \iint_D \sin\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ où D est le domaine ci-dessous, en utilisant le changement de variable : $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = xv = u.v \end{cases}$

Page 31 chapitre 1

$1 \le x \le 2$

$x \in [1;2]$





$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u \leftarrow$ "Jacobien"

$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /$ tel que $1 \le x \le 2 ; \; x \le y \le 3x \}$

Notes

Page 31 chapitre 1

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1\le x\le 2 \;;\; x\le y\le 3x\}$$

$$\Delta = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1\le u\le 2 \;;\; u\le uv\le 3u\} = [1;2]\times[1;3]$$

$\div u$ ($1\le v\le 3$) $\div u>0$

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \sin\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy = \underbrace{\iint_{[1;2]\times[1;3]}}_{\text{rectangle}} \overbrace{\sin(v)\times \underbrace{|u|}_{=u \text{ car } u>0}}^{\text{à var. séparables}} du\,dv = \int_1^3 \underbrace{\int_1^2 u.\sin v\,du}\,dv$$

$$I = \int_1^3 \sin v.\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 dv = \int_1^3 \sin v.\frac{3}{2}dv = \frac{3}{2}.\Big[-\cos v\Big]_1^3 = \frac{3}{2}\left(\cos 1 - \cos 3\right)$$

Cas particulier : $I = \int_1^2 u\,du \times \int_1^3 \sin v\,dv = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 \times \Big[-\cos v\Big]_1^3$

Page 32 chapitre 1

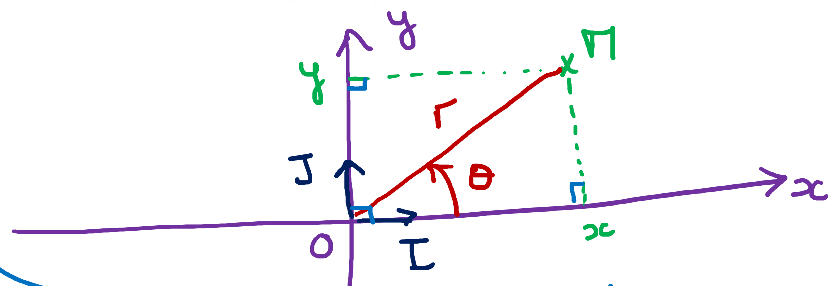
3) Passage en coordonnées polaires

Lorsque le domaine d'intégration est un disque ou une portion de disque, le calcul d'une intégrale double est simplifié si l'on passe en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases} \text{ avec } r \geq 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

$r = OM \geq 0$

$\theta = mes(\widehat{\vec{OI}, \vec{OM}}) \in [0; 2\pi[$



$\cos\theta = \frac{Adj}{Hyp.} = \frac{x}{r}$ si $r \neq 0$; $\sin\theta = \frac{Opp}{Adj} = \frac{y}{r}$ si $r \neq 0$

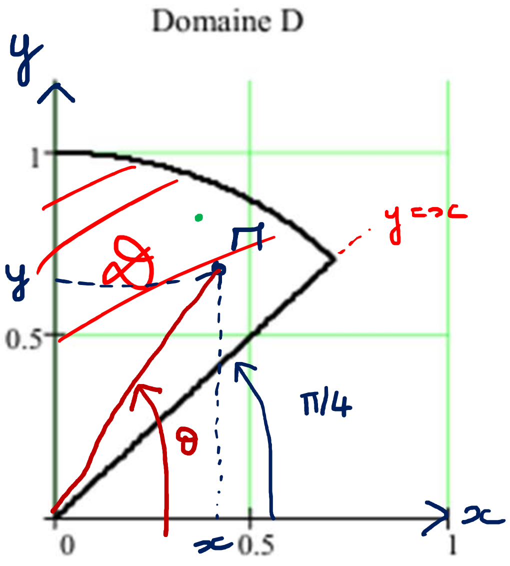
Le jacobien est alors :

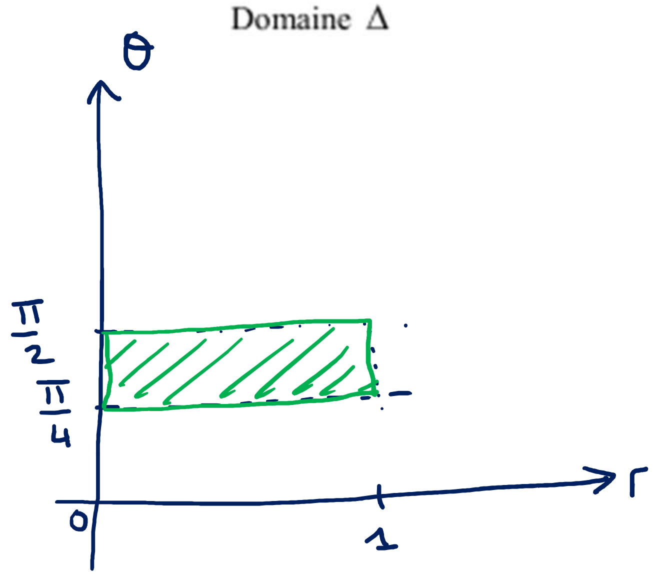
$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}) = r$$

On obtient alors : $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$

Exemple Calculer $I = \iint_D xy \, dxdy$ où D est le domaine délimité par le cercle de centre O et de rayon 1, la droite d'équation y=x et l'axe des ordonnées.

Page 32 chapitre 1





$$\iint_{\mathcal{D}} 1 \, dxdy = \text{aire de } (\mathcal{D})$$

$$\int U' . U^{\alpha} dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$$

$$\Delta = \left\{ (r,\theta) \ / \ 0 \leq r \leq 1 \ ; \ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Cas particulier

$$I = \iint_{\mathcal{D}} xy \, dxdy = \iint_{[0;1]\times[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]} r\cos\theta . r\sin\theta . r dr d\theta = \int_0^1 r^3 dr \times \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta . \sin\theta \, d\theta . = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \times \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$\int U' . U \, d\theta = \frac{U^2}{2} + C$$

$$I = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$