

Travaux dirigés 1 : Résolution numérique d'équations $f(x)=0$

Page 3 TD/TP OL

Présentation du problème

✓ Exemple de résolution littérale d'une équation $f(x)=0$:

Résoudre $e^{x^2} - 5 = 0$:

$$\Leftrightarrow e^{x^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^{x^2}) = \ln 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \ln 5$$

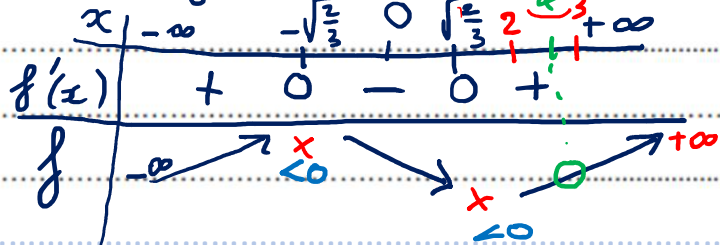
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\ln 5} \text{ ou } -\sqrt{\ln 5}$$

$$S = \{ \sqrt{\ln 5}; -\sqrt{\ln 5} \}$$

✓ De nombreuses équations $f(x)=0$ ne peuvent pas être résolues de façon littérale, on peut cependant obtenir une valeur approchée de leurs solutions, lorsqu'elles existent.

Par exemple, on souhaite résoudre l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$. Ne trouvant pas de racines évidentes du polynôme $f(x) = x^3 - 2x - 5$, on étudie la fonction f afin de déterminer l'existence de solutions de l'équation $f(x)=0$:

$$\text{Df } f = \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } -\sqrt{\frac{2}{3}}$$



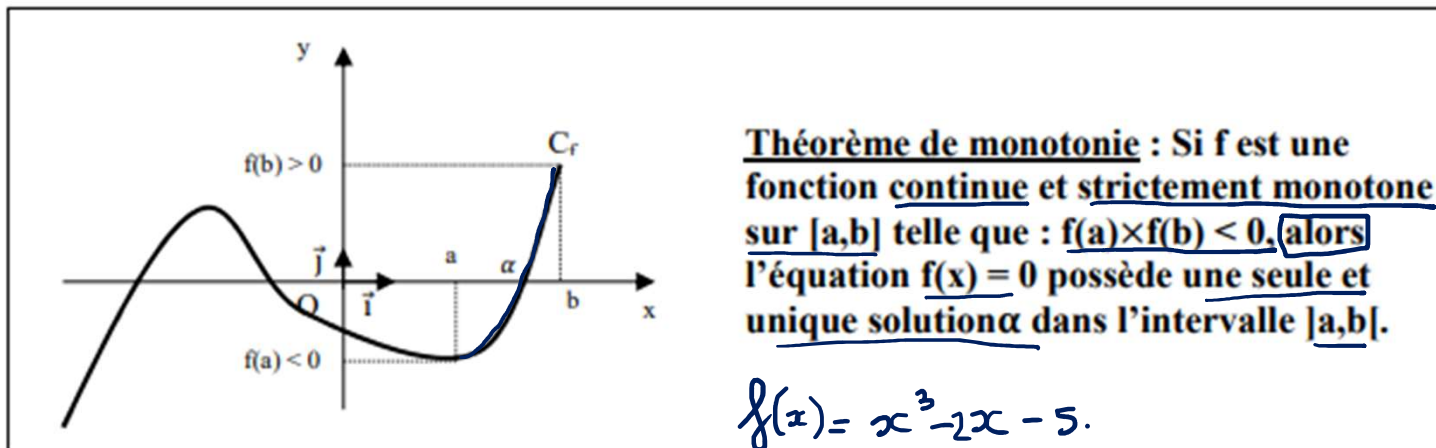
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\times f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) \simeq -3,9 \quad \times f(\sqrt{\frac{2}{3}}) \simeq -6,1$$

A priori quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$? Préciser dans quel(s) intervalle(s) elles se trouvent :

A priori l'équation $f(x) = 0$ a une solution α dans $[\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty[$.

A l'aide d'un tableur, on détermine un intervalle de longueur 1 dans lequel se trouve l'unique solution notée α . On justifie l'existence et l'unicité de α avec le théorème de monotonie (appelé aussi le corollaire des valeurs intermédiaires, ou théorème de bijection) ci-dessous :



D'après le th. de monotonie, comme : $f \in C^0(\mathbb{R})$, et strictement croissante sur $[2; 3]$ et $f(2) \times f(3) = 1 \times (-16) = -16 < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans $]2; 3[$.

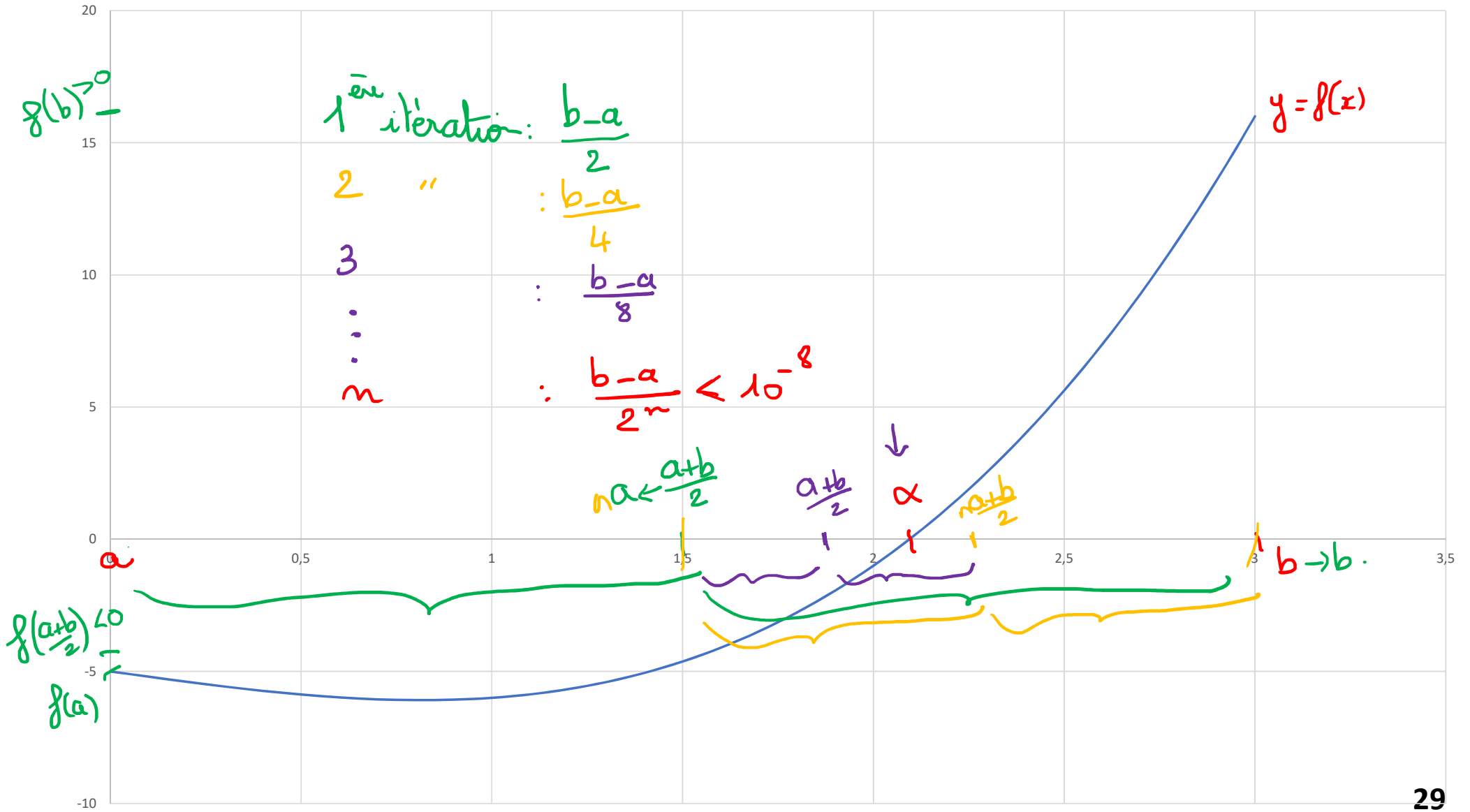
Cherchons alors une valeur approchée à 10^{-8} près de $\alpha \in [2; 3]$ à l'aide des trois méthodes suivantes. Chacune d'elle consiste, à partir d'un encadrement d'une solution α de l'équation $f(x)=0$ dans un intervalle $[a,b]$, de réduire la taille de ce dernier jusqu'à la précision voulue, tout en gardant la racine à l'intérieur. Cela suppose que la fonction change de signe au passage de la racine. La réduction de l'intervalle peut se faire de différentes façons...

I. Méthode dichotomique

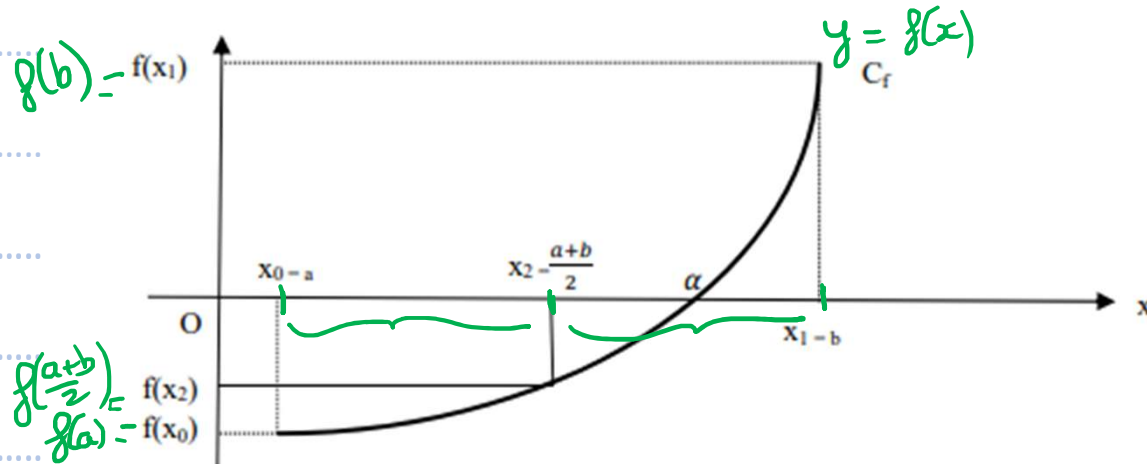
- ✓ Le principe C'est la méthode la plus simple, elle consiste à diviser l'intervalle $[a,b]$ en deux, en remplaçant une des deux extrémités de l'intervalle par le point milieu : $\frac{a+b}{2}$
- ✓ Algorithme et test d'arrêt

- On pose $x_0 = a$ et $x_1 = b$,
- on calcule $f(x_2)$ avec $x_2 = \frac{a+b}{2}$; si $f(x_0).f(x_2) < 0$ alors $\alpha \in]x_0, x_2[$, sinon $\alpha \in]x_2, x_1[$
- on recommence le processus jusqu'à ce que l'intervalle $[a,b]$, diminuant de moitié à chaque fois, ait une longueur inférieure à ε , ε étant la précision souhaitée.
- A la $n^{\text{ième}}$ étape, on obtient alors : $|x_{n+1} - \alpha| < \frac{b-a}{2^n}$

$f(x)$



- La résolution numérique implique l'utilisation d'un tableur. Le test d'arrêt pourra alors être: $|x_{n+1} - \alpha| < |x_{n+1} - x_n| < 10^{-8}$



$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$$

$x > 0$

$$\ln(10^8) = 8 \ln 10$$

✓ Application

Combien d'itérations permettront d'obtenir α , la solution de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$ dans l'intervalle $[2; 3]$ à 10^{-8} près ?

On résout $\frac{b-a}{2^n} < 10^{-8} \Leftrightarrow \frac{3-2}{2^n} < 10^{-8} \Leftrightarrow 1 < 10^{-8} \cdot 2^n$

$\Leftrightarrow \ln(10^8) < \ln(2^n)$

$\Leftrightarrow 10^8 < 2^n$

$\Leftrightarrow \ln(10^8) < n \ln 2$

$\Leftrightarrow n > \frac{8 \ln 10}{\ln 2} \approx 26,5$

$n \geq 27$

A partir de 27 itérations, on obtient la valeur approchée à 10^{-8} près.

A l'aide du logiciel Open Office Calc, tracer la fonction f sur l'intervalle $[1; 3]$, x variant avec un pas de 0,1. Vérifier la présence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[2; 3]$.

Appliquer la méthode dichotomique à l'intervalle $[2; 3]$ pour déterminer l'une des solutions de cette équation.

Pour cela :

- Construire 7 colonnes contenant les valeurs de a , $(a+b)/2$, b , $f(a)$, $f((a+b)/2)$, $f(b)$, $b - a$.
- Pour appliquer cette méthode, vous devez tester le signe d'une valeur ; vous utiliserez pour cela le test logique **Si** dont la syntaxe est :

Si (*test à effectuer ; valeur de la cellule si test vrai ; valeur de la cellule si test faux*)

- On prendra le test d'arrêt $b - a < 10^{-8}$. Pour cela, ajouter une colonne « test » indiquant « ok » en rouge si $b - a < 10^{-8}$, et « nok » en vert sinon.

- Déterminer une valeur approchée de $\alpha \in [2; 3]$, solution de l'équation :

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \text{ à } 10^{-8} \text{ près.}$$

✓ Conclusion L'avantage de cette méthode est qu'elle converge toujours. Par contre, les limites de la méthode sont multiples:

- Elle nécessite un encadrement du zéro recherché. Cela peut s'obtenir en étudiant la fonction f et en évaluant graphiquement l'intervalle de départ.
- La convergence est lente. En effet, pour la division de l'intervalle en deux, la

Notes

borne inf.

n	a	$\frac{a+b}{2}$	b	f(a)	$f(\frac{a+b}{2})$	f(b)	b-a	Test
0	2	$= \frac{2+3}{2}$	3	$= 3^2 - 2 \cdot 2 - 5$			$= b - a$	$= \text{Si}(b-a < 10^{-8})$ alors "OK"; "not"
1	$= \text{Si}(f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0; a; \frac{a+b}{2})$			$= \text{Si}(f(b) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0; b; \frac{a+b}{2})$				
2	alors $x \in [a; \frac{a+b}{2}]$ sinon $x \in [\frac{a+b}{2}; b]$			$x \in [\frac{a+b}{2}; b]$				
	nva mb			nva mb				

Exercice 1 On définit la fonction f telle que pour tout x réel, $f(x) = e^x - 4x$

1. Peut-on résoudre à la main l'équation $f(x) = 0$?

En utilisant le tableur d'Open Office Calc, on souhaite résoudre l'équation : $f(x) = e^x - 4x = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$ en utilisant les différentes méthodes numériques étudiées en T.D. Il faut tout d'abord localiser la ou les solutions de cette équation. Pour cela :

2. Au brouillon, étudier la fonction f sur son ensemble de définition.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
3. A l'aide du logiciel Open Office Calc, tracer la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$, x variant avec un pas de 0,1. Vérifier la présence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
4. Appliquer la méthode dichotomique à l'intervalle $[0 ; 1]$ pour déterminer l'une des solutions de cette équation.

Pour cela :

- Construire 7 colonnes contenant les valeurs de a , $(a+b)/2$, b , $f(a)$, $f((a+b)/2)$, $f(b)$, $b - a$.
- Pour appliquer cette méthode, vous devez tester le signe d'une valeur ; vous utiliserez pour cela le test logique **Si** dont la syntaxe est :
Si (test à effectuer ; valeur de la cellule si test vrai ; valeur de la cellule si test faux)
- On prendra le test d'arrêt $b - a < 10^{-7}$. Pour cela, ajouter une colonne « test » indiquant « ok » en rouge si $b - a < 10^{-7}$, et « nok » en vert sinon.

Exercice 1

On définit la fonction f telle que pour tout x réel, $f(x) = e^x - 4x$

Page 13 TD/TP OL

1. Peut-on résoudre à la main l'équation $f(x) = 0$?

$$e^x = 4x \Leftrightarrow x = \ln(4x) \quad \text{Bloqué}$$

En utilisant le tableur d'Open Office Calc, on souhaite résoudre l'équation : $f(x) = e^x - 4x = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$ en utilisant les différentes méthodes numériques étudiées en T.D. Il faut tout d'abord localiser la ou les solutions de cette équation. Pour cela :

2. Au brouillon, étudier la fonction f sur son ensemble de définition.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	0	$\alpha \approx 1,4$	$\ln 4$	β	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		

$$f'(x) = e^x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 4 \Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underbrace{e^{-\infty}}_0 - 4(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underbrace{e^{+\infty}}_{+\infty} - 4(+\infty) = +\infty$$

$$f(\ln 4) = e^{\ln 4} - 4 \ln 4 = 4 - 4 \ln 4 = 4(1 - \ln 4) < 0$$

comme $4x \leq e^x$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Notes D'après le th de monotonie, comme $f \in C^0([0;1])$, strictement décroissante sur $[0;1]$ et $f(0) \times f(1) = 1 \times (e-4) < 0$, alors l'équation $f(x)=0$ a une seule solution α dans $]0;1[$

$$C_n \text{ résout : } \frac{b-a}{2^n} < 10^{-7} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-7} \xRightarrow[\text{inverse}]{\text{ln} \uparrow} 2^n > 10^7 \Leftrightarrow n \cdot \ln 2 > 7 \ln 10$$

$$\xRightarrow[\div \ln 2 > 0]{} n > \frac{7 \ln 10}{\ln 2} \simeq 23, \dots$$

A partir de la 24^e itération on obtient α à 10^{-7} près.