Corrigé ex2 chap4
1FTP

Exercice 2

$I = \int_{-5}^{5}(4x^2 - 3)dx$; $J = \int_{0}^{7}\sin(2t)dt$; $K = \int_{1}^{3}(2e^{2x} - 3x)dx$; $L = \int_{-1}^{3}(5t - 4)dt$

$M = \int_{1}^{3}\theta^2 d\theta$; $N = \int_{-1}^{3} 3\cos(5\theta)d\theta$; $P = \int_{0}^{0,01} 2\sin(314\theta)d\theta$; $Q = \int_{1}^{2}\frac{2}{3r+2}dr$

$*$ $M = \int_1^3 \theta^2 dx = \theta^2 \int_1^3 1.dx$

$M = \theta^2.[x]_1^3 = \theta^2(3-1) = 2\theta^2$

$*$ I : On intègre sur $[-5;5]$, intervalle centré en 0, la fonction paire $f(x) = 4x^2 - 3$

En effet $f(-x) = 4(-x)^2 - 3 = 4x^2 - 3 = f(x)$

Alors $I = 2\times\int_0^5 (4x^2-3)\,dx = 2\times\left[4\frac{x^3}{3} - 3x\right]_0^5 = 2\left(4\frac{125}{3} - 15 - (0)\right) = 2\left(\frac{500-45}{3}\right) = \frac{910}{3}$

$*$ $J = \left[\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^7 = \frac{1}{2}(1 - \cos 14)$ ou écrire : $J = \frac{1}{2}\int_0^7 2\sin(2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-\cos(2t)\right]_0^7 = \frac{1}{2}(1-\cos 14)$

$*$ $K = \left[e^{2x} - 3\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = e^6 - \frac{27}{2} - \left(e^2 - \frac{3}{2}\right) = e^6 - e^2 - \frac{27}{2} + \frac{3}{2} = e^6 - e^2 - \frac{24}{2} = e^6 - e^2 - 12$

$*$ $L = \left[5\frac{t^2}{2} - 4t\right]_{-1}^3 = \frac{45}{2} - 12 - \left(\frac{5}{2} + 4\right) = \frac{40}{2} - 16 = 20 - 16 = 4$

$*$ $M = \left[\frac{\theta^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

$*$ $N = 3\int_{-1}^3 \cos(5\theta)\,d\theta = \frac{3}{5}\int_{-1}^3 5\cos(5\theta)\,d\theta = \frac{3}{5}.\left[\sin(5\theta)\right]_{-1}^3 = \frac{3}{5}.\left(\sin 15 - \sin(-5)\right)$

$N = \frac{3}{5}(\sin 15 + \sin 5)$

Notes

$$* \; P = \int_0^{0,01} 2\sin(314.\theta)\,d\theta = 2.\int_0^{0,01} \sin(314.\theta)\,d\theta = \frac{2}{314}.\int_0^{0,01} 314\sin(314.\theta)\,d\theta$$

$$P = \frac{1}{157}\left[-\cos(314.\theta)\right]_0^{0,01} = \frac{1}{157}\left(1 - \cos(3{,}14)\right)$$

$$* \; Q = \int_1^2 \frac{2}{3r+2}\,dr = 2.\int_1^2 \frac{1}{3r+2}\,dr = \frac{2}{3}.\int_1^2 \frac{3}{3r+2}\,dr$$

$$Q = \frac{2}{3}.\left[\ln|3r+2|\right]_1^2 = \frac{2}{3}.\left(\ln 8 - \ln 5\right) = \frac{2}{3}.\ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

II. Calcul intégral

Théorème / définition : Soit f, une fonction continue sur [a,b], soit F, une fonction primitive de f. On appelle intégrale de la fonction f sur l'intervalle [a,b], le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ et tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Interprétation graphique : $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.

$J = \int_0^{e-1} \frac{1}{x+1} dx = \left[\ln|x+1|\right]_0^{e-1} = \ln|e-1+1| - \ln|0+1| = \ln(e) - \ln(1) = 1.$

$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + cte$ ici $u = x+1 \Rightarrow u' = 1$

Notes

III. Propriétés

1) Linéarité

Soit f, g deux fonctions continues sur [a,b]. Soit α et β deux nombres réels. On a alors :

$$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

<u>Exemples et applications</u>

✓ $I = \int_{-1}^{1} (3x^7 + 2x^6 - 1)dx = 3\int_{-1}^{1} x^7 dx + 2\int_{-1}^{1} x^6 dx - \int_{-1}^{1} 1.dx$

$= 3\left[\frac{x^8}{8}\right]_{-1}^{1} + 2.\left[\frac{x^7}{7}\right]_{-1}^{1} - [x]_{-1}^{1}$

$= 3.\underbrace{\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right)}_{0} + 2\left(\frac{1}{7} - \frac{-1}{7}\right) - (1-(-1)) = \frac{4}{7} - 2 = -\frac{10}{7}$

on écrire :

$I = \left[3\frac{x^8}{8} + 2\frac{x^7}{7} - x\right]_{-1}^{1}$

$= \left(\frac{3}{8} + \frac{2}{7} - 1 - \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{7} + 1\right)\right) = \frac{-10}{7}$

$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx =$ ASTUCE : $x = x+1-1$ donc :

$J = \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$= [x - \ln|x+1|]_0^1 = 1 - \ln 2 - 0$

$J = 1 - \ln 2$

$L(x) = \int (5.\cos(2x) - e^{5x} + 9)dx = 5.\int \cos(2x)\,dx - \int e^{5x}dx + 9.\int 1.dx$

$= \frac{5}{2}\int 2\cos(2x)\,dx - \frac{1}{5}\int 5e^{5x}\,dx + 9x + cte$

$L(x) = \frac{5}{2}\sin(2x) - \frac{1}{5}e^{5x} + 9x + cte$