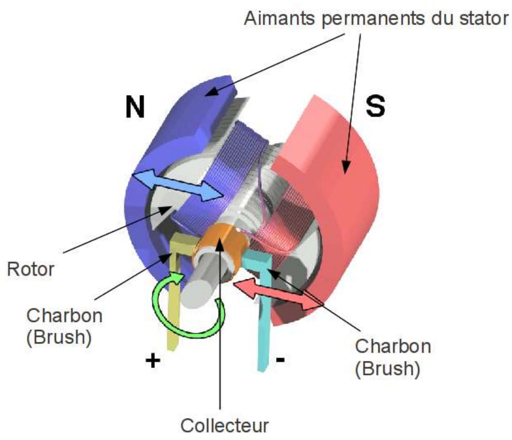
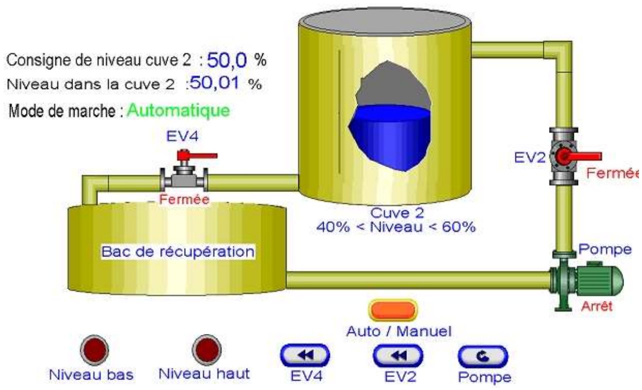
BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R2-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Chapitre 6 : Transformation de Laplace et applications



Moteur à courant continu

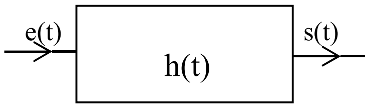


Régulation automatique

Enseignante : Sylvia Le Beux
sylvia.lebeux@univ-tln.fr

Introduction

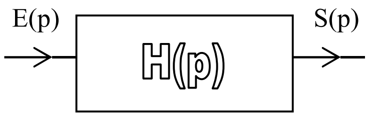
Soit S un système physique (circuit RC, RLC…). Dans un tel système une excitation extérieure ou un signal d'entrée e(t) (tension) engendre une réponse ou un signal de sortie s(t). s(t) dépendra de e(t) et de h(t), fonction mathématique modélisant les caractéristiques temporelles du circuit physique (voir ci-après).



On dit que le **système est linéaire** lorsque e(t) et s(t) sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants dans l'espace temporel (variable = t).

La **transformation de La place** est un outil mathématique facilitant l'étude du signal de sortie : en effet, elle transforme toute équation différentielle en équation algébrique (avec des additions et des multiplications, donc bien plus simple à résoudre.)

Lorsque les **conditions initiales sont nulles**, le système est alors caractérisé par le schéma fonctionnel ci-dessous où : S(p) = H(p).E(p) où H est appelée la <u>fonction de transfert</u> du système. (E(p) et S(p) sont les transformées de Laplace respectives de e(t) et s(t), et H(p) la transformée de Laplace de h(t)).



Partie I : Rappels sur les signaux causaux

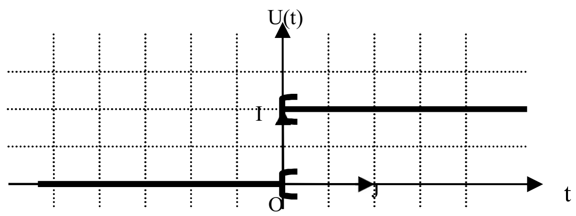
I. Signaux causaux

1) Définition

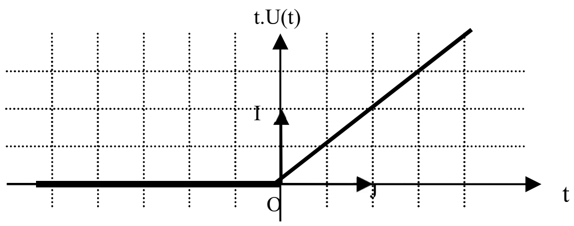
On dit qu'un signal défini sur $\mathbb{R}$ est causal, lorsqu'il est nul sur $]-\infty\ ;0\ [$.

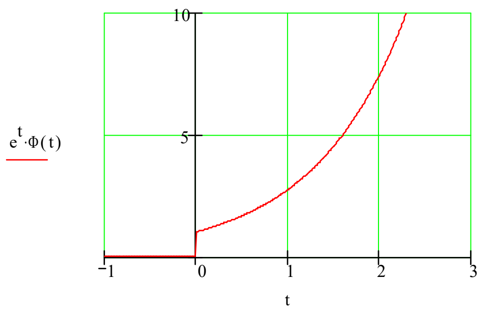
2) Exemples

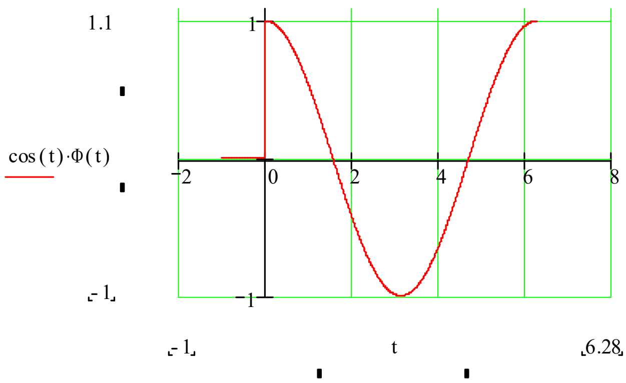
✓ Le signal « échelon-unité » (ou signal de Heaviside), notée U (ou Φ) est causal et défini par : $U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

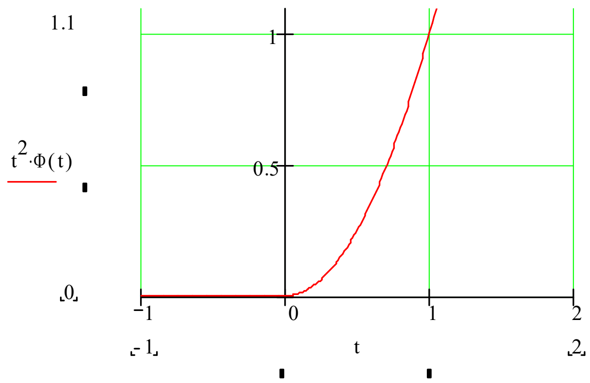


✓ Les signaux : t.U(t) (appelé aussi signal rampe) , e^t.U(t) , Cos(t).U(t) , t^2.U(t) sont donc aussi des signaux causaux.









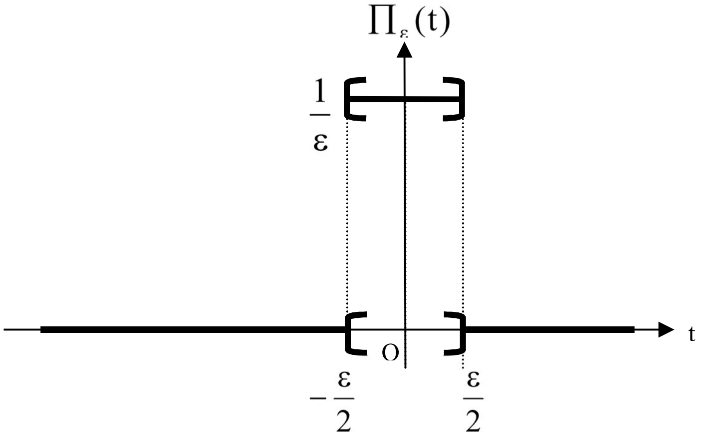
II. Impulsion de Dirac ou distribution de Dirac

Définitions

Soit la fonction porte de largeur $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } |t| \le \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 \text{ si } |t| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(t).dt = 1$$

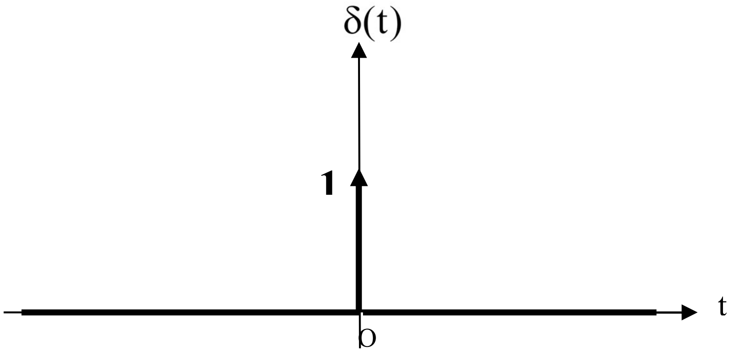


On appelle impulsion de Dirac : $\delta = \lim_{\varepsilon \to 0} \Pi_\varepsilon(t)$ où $\varepsilon > 0$

On définit parfois δ abusivement par : $\boxed{\boldsymbol{\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 0 \\ +\infty \text{ si } t = 0 \end{cases} \text{, et } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1}}$

δ n'est pas une fonction, c'est une distribution, c'est pourquoi on l'appelle aussi distribution de Dirac.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_\varepsilon(x)dx = 1$, par convention, on note donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$, et par convention sa représentation graphique est :



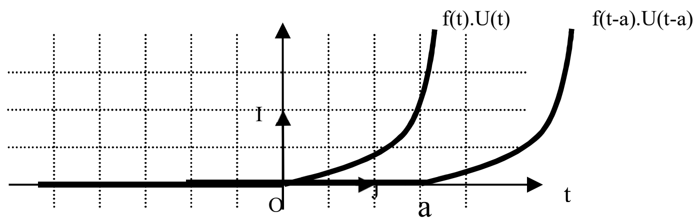
Remarque De nombreux théorèmes (convergence d'intégrales, de séries, inversion de limites en général,…) reposent sur des hypothèses souvent très fortes portant sur les fonctions. Dans la majeure partie des cas, celles-ci ne sont pas vérifiées.

Le recours aux distributions permet d'élargir le champ d'application de ces théorèmes. Une distribution est un concept plus général que celui de fonction. Il permet, entre autre, la formulation et donc le traitement de signaux discrets. Tous les calculs sur les fonctions s'appliquent aussi aux distributions.

III. Signaux retardés

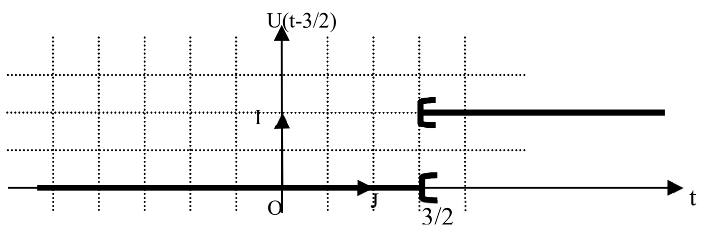
1) Définition

Soit a un nombre réel positif.
Le signal $\mathbf{f(t-a).U(t-a)}$ est le signal $\mathbf{f(t).U(t)}$ retardé de a.

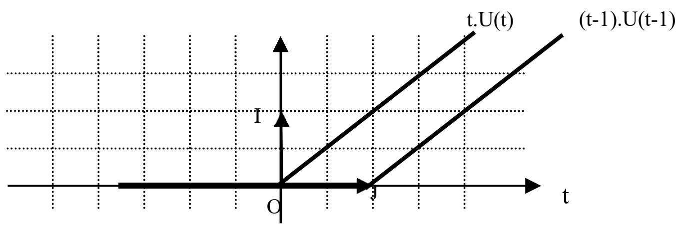


2) Exemples

- ✓ U(t-3/2) est le signal échelon unité retardé de 3/2.



- ✓ (t-1).U(t-1) est le signal rampe retardé de 1 :



Partie II : Transformation de Laplace

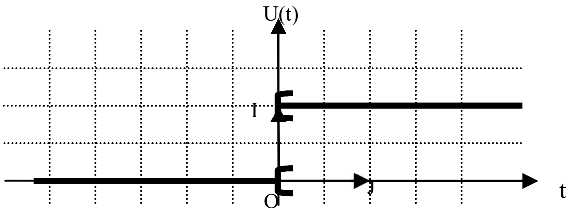
I. Transformation de Laplace directe

1) Définition

Soit f, un signal causal. On appelle transformée de Laplace de f la fonction F définie par l'intégrale : $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)dx$, $p \in \mathbb{C}$.
L'ensemble de définition de F est l'ensemble des nombres complexe p tels que l'intégrale ci-dessus converge.
$\mathfrak{L}$ est l'application qui à f associe F, on l'appelle transformation de Laplace.
On note F(p)=$\mathfrak{L}$[f(x)] ou encore : F= $\mathfrak{L}$[f].

2) Transformées de l'échelon-unité

- ✓ Définition : $U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$. (appelée aussi fonction de Heaviside et noté **Φ)**



- ✓ Transformée de Laplace :

$$\mathfrak{L}[U(x)] = F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}.U(x).dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^X e^{-p}\ .U(x).dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^X e^{-px}.dx$$

1er cas : p> 0 : $F(p) = \lim_{X\to+\infty} \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{e^{-pX}}{-p} - \frac{1}{-p}\right) = \frac{1}{p}$

2ème cas : p< 0 : $\lim_{X\to+\infty} \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty} \left(\frac{e^{-pX}}{-p} - \frac{1}{-p}\right) = +\infty$, alors F(p) n'existe pas.

3ème cas : p= 0 : $\int_0^{\infty} U(x).dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^X U(x).dx = \lim_{X\to\infty} \int_0^X 1.dx = \lim_{X\to+\infty} [x]_0^X = \lim_{X\to+\infty} X = +\infty$, donc F(p) n'existe pas.

On admet que : $\mathfrak{L}$[U(x)]= $\frac{1}{p}$ Si et seulement si Re(p)>0.

On note également : $\mathfrak{L}$[1]= $\frac{1}{p}$

TABLEAU DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

Définition $\mathcal{L}[f(t).U(t)]=F(p)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt$ **Notation abusive** : $\mathcal{L}[f(t)]=F(p)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}.dt$

Signaux usuels

f(t).U(t)* ou f(t) en notation abusive *Sauf pour $\delta(t)$ qui est déjà causale.	$\mathcal{L}$[f(t).U(t)] ou $\mathcal{L}$[f(t)] ou F(p)
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
U(t) ou 1	$\frac{1}{p}$
$t^n.U(t)$ ou t^n (n est un entier naturel non nul)	$\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}{p^{n+1}}$ n ! se dit « factorielle de n »
$\cos(\omega t).U(t)$ ou $\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).U(t)$ ou $\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$ ou e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$e^{-at}.t^n.U(t)$ ou $e^{-at}.t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\cos(\omega t).e^{-at}.U(t)$ ou $\cos(\omega t).e^{-at}$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t).e^{-at}.U(t)$ ou $\sin(\omega t).e^{-at}$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

Propriétés

g, fonction causale	$\mathcal{L}$[g(t)] ou G(p)
$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$	$\alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$
Signal retardé de a : f(t-a).U(t-a) où a>0	$e^{-ap}.F(p)$
Signal dérivé : f '(t).U(t)	$pF(p)-f(o^+)$
Signal dérivé deux fois : f ''(t).U(t)	$p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+)$
$f^{(n)}(t).U(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\ldots-pf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+)$.
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
t.f(t).U(t)	-F'(p)

II. Calcul de transformées de Laplace

A l'aide du tableau précédent, déterminer la transformée de Laplace des signaux suivants :

1) $f(t) = t^3.U(t)$; F(p) = ………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

2) $f(t) = t^7$; F(p) = ………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………..

3) $f(t) = 4t^5 - 3t^2 + 2$; F(p) = ……………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

4) $f(t) = \cos(3t).U(t)$; F(p) = ……………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

5) $f(t) = e^{-2t}.\cos(3t).U(t)$; F(p) = …………………………………………………...

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

6) $f(t) = t^2.e^{3t}.U(t)$; F(p) = ………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

7) $f(x) = (x+1)^2.U(x)$; F(p) = ………………………………………………………

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

8) $f(t) = \sin(t - \frac{\pi}{4}).U(t - \frac{\pi}{4})$; F(p) = …………………………………………...

………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………..

9) $f(t) = \sin(t - \frac{\pi}{4}).U(t)$; F(p) = ……………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

10) $f(t) = \sin t.U(t - \frac{\pi}{4})$; F(p) = ………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

11) f(x) = (x^2-1).U(x-2)= ; F(p) = ………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

……………………………………………………………………………………..............

III. Transformation de Laplace inverse

1) Définition

Soit F(p), la transformée de Laplace d'une fonction f(x) : F(p)=$\mathcal{L}$[f(x)]. On appelle original de F, la fonction f. On note : f(x) = $\mathcal{L}^{-1}$[F(p)] ou encore : f =$\mathcal{L}^{-1}$[F].
La transformation $\mathcal{L}^{-1}$ est appelée transformation de Laplace réciproque.

Exemples Compléter à l'aide du tableau de la page 7

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p}]=$

…………………………………………………………………………………...

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{p^3}]=$ …………………………………………………………………………………...

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p+3}]=$ ……………………………………………………………………………

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{p}{p^2+4}]=$ …………………………………………………………………………..

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{p^2+4}]=$ ………………………………………………………………………….

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(p+3)^2}]=$ ………………………………………………………………………..

2) Propriété de linéarité de la transformation de Laplace inverse

Linéarité $\mathcal{L}^{-1}[\lambda F+\mu G]= \lambda \mathcal{L}^{-1}[F]+ \mu \mathcal{L}^{-1}[G]$ **(λ,μ sont des complexes).**

Exemples Calculer l'original des fonctions suivantes :

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p^4}]=$ …………………………………………………………………………………...

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{p}+\frac{3}{p^3}-\frac{1}{p^5}]=$ ………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………..................

$\mathfrak{L}^{-1}[\frac{5p}{p^2+9}]=$ ……………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

……………………………………………………………………………………………...............

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{p^2+9}]=$ …………………………………………………………………………………

$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2p+6}{(p+3)^2}]=$ …………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

$F(p) = \frac{3p+1}{p^2-9}$ ……………………………………………………………………….........

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………...

$G(p) = \frac{3p^2-p+1}{(p^2+1)(p+1)^2} =$……………………………..

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………….................

……………………………………………………………………………………….................

……………………………………………………………………………………….................

…………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

$\mathrm{H(p)} = \frac{3\mathrm{p}^2-\mathrm{p}+1}{(\mathrm{p}^2+1)(\mathrm{p}+1)^2} \times e^{-3p} =$…………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

$J(p) = \frac{p}{p^2+p+1}$……………………………………………………………………………….......

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………..

IV. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

1) Théorème de la valeur initiale : $\boxed{\lim_{p \to \infty} p.F(p) = f(0^+)}$

2) Théorème de la valeur finale : $\boxed{\lim_{p \to 0} p.F(p) = \lim_{x \to +\infty} f(x)}$

3) Exercice

Déterminer $\lim_{t \to +\infty} y(t)$, si la transformée de Laplace de $t \mapsto y(t).U(t)$ est :
$Y(p) = \frac{e^{-ap}}{p^2}\left(1 - \frac{e^{-ap}}{1+2ap}\right)$ où a>0.

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

………...

…………………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………….............

Partie III : Applications de la Transformation de Laplace

La transformation de Laplace transforme toute équation différentielle en équation algébrique, en effet :

$\mathcal{L}[f'(t)] = p.F(p) - f(o^+)$;

$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0^+) - f\,'(0^+)$;

$\mathcal{L}[f^{(3)}(t)] = p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf\,'(0^+) - f\,''(0^+)$;

… … …

$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f\,'(0^+) - ... - pf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$.

(n est un entier naturel.)

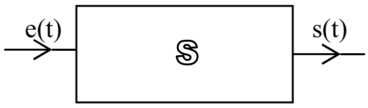
On note $g(0^+)$, la limite quand x tend vers 0 par valeurs positives de g(x)

La transformation de Laplace facilite donc la résolution d'une EDLCC, et par la même tout problème du GEII.

I. Application à l'étude des systèmes

1) Fonction de transfert d'un circuit

Dans un circuit électrique (RC, RLC …) , un signal d'entrée e(t) (tension) engendre un signal de sortie s(t), appelé aussi réponse du circuit au signal e(t)).



On dit que le circuit S est linéaire lorsque e(t) et s(t) sont liés par une EDLCC. Le circuit est dit d'ordre n lorsque l'équation différentielle est d'ordre n :

$$a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1}s^{(n-1)}(t) + ... + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + b_{n-1}e^{(n-1)}(t) + ... + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

Fonction de transfert du circuit **On note E(p) et S(p) les transformées de La place respectives de e(t) et s(t), puis on applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle :**

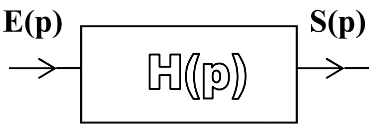
$$\mathbf{a_n s^{(n)}(t) + a_{n-1}s^{(n-1)}(t) + ... + a_1 s'(t) + a_0 s(t) = b_n e^{(n)}(t) + b_{n-1}e^{(n-1)}(t) + ... + b_1 e'(t) + b_0 e(t)}$$

Si les conditions initiales sont nulles :

$$\mathbf{s^{(n)}(0) = s^{(n-1)}(0) = ... = s'(0) = s(t) = e^{(n)}(0) = e^{(n-1)}(0) = ... = e'(0) = e(0) = 0}$$

on obtient alors une équation algébrique reliant E(p) et S(p) que l'on résout :
$S(p) = H(p)\times E(p)$. On appelle fonction de transfert du circuit et on note H, la fonction définie par : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$.

Le circuit est alors caractérisé par le schéma fonctionnel ci-dessous :



On obtient alors : S(p) = H(p)×E(p), et on en déduit que : s(t) = $\mathcal{L}^{-1}$[H(p)×E(p)]

2) <u>Exemple de circuit du premier ordre</u> Etude du filtre passe-haut.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :
s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t) ; s(0) = e(0) = 0. Soit S(p) = $\mathcal{L}$[s(t)] et E(p) = $\mathcal{L}$[e(t)].

- ✓ Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- ✓ On appelle **réponse impulsionnelle** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est une impulsion de Dirac. Déterminer la réponse impulsionnelle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............
…………………………………………………………………………………………………….............

- ✓ On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).
- ✓ Montrer qu'après disparition du régime transitoire, la réponse de ce circuit à $e(t) = 5\cos(3t)$ est de la forme : $s(t) = 5A\cos[3t + \varphi]$ avec : $A = |H(3j)|$ et $\varphi = Arg(H(3j))$.

Plus généralement, on admet que : Après disparition du régime transitoire, la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale $e(t) = e_0\cos(\omega t)$ est de la forme : **$s(t) = e_0 A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]$ avec : $A(\omega) = |H(j\omega)|$ et $\varphi(\omega) = Arg(H(j\omega))$.**

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

……………………………………………………………………………………………….............

3) Fonctionnement d'un système « entrée-sortie » d'ordre 3

Un système « entrée-sortie » est décrit par l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{d^3s}{dt^3}(t) + \frac{ds}{dt}(t) = e(t) \\ s(0^+) = s'(0^+) = s''(0^+) = 0 \end{cases}$$

a) On note E(p) et S(p) les transformées de Laplace respectives de e(t) et s(t). Déterminer H(p), la fonction de transfert de ce système.

b) Déterminer la réponse impulsionnelle

c) Déterminer la réponse indicielle.

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

……………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

4) Système du second ordre, coefficient d'amortissement :

Soit le système physique, caractérisé par l'équation différentielle :

$\begin{cases} s''(t) + 2.\lambda.\omega_0 s'(t) + \omega_0^2 s(t) = 2e(t) \\ s(0) = s'(0) = 0 \end{cases}$ où λ et ω_0 sont des constantes.

a) Déterminer la fonction de transfert de ce système, que l'on notera $H(p, \lambda)$.
b) On pose $\omega_0 = 0.1\text{Hz}$. Avec un logiciel de calcul formel, déterminer la réponse à e(t)=10, que l'on notera $s(t, \lambda)$. Tracer dans un même repère les courbes représentant $s(t, \lambda)$ pour les valeurs de λ égales à 0.2 ; 0.5 ; 0.707 ; 0.8 ; 1 ; 2.

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

…………………………………………………………………………………………….............

5) <u>Exercice</u> Soit le circuit suivant :

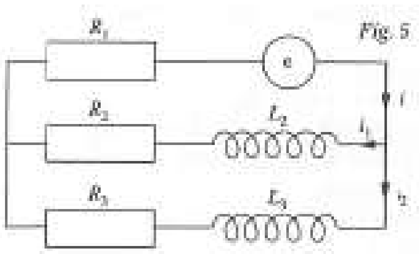


Fig. 5

$\mathbf{R_1 = 30\Omega}$; $\mathbf{R_2 = 10\Omega}$; $\mathbf{R_3 = 20\Omega}$
$\mathbf{L_2 = 2H}$; $\mathbf{L_3 = 4H}$

Les intensités i_1 et i_2 vérifient : $\begin{cases} -5i_1 - \frac{di_1}{dt} + 10i_2 + 2\frac{di_2}{dt} = 0 \\ 20i_1 + \frac{di_1}{dt} + 15i_2 = \frac{1}{2}e \\ i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0 \end{cases}$

avec $e(t) = 110\left[U(t) - U\left(t - \frac{1}{10}\right)\right]$

Déterminer i_1 et i_2.

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………………...

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

…………………………………………………………………………………………..............

II. Stabilité d'un système

Définition Un système est stable si sa sortie tend vers zéro lorsque l'entrée devient nulle.

Remarque

La fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{P(p)}{Q(p)}$ avec $\deg(P) \leq \deg(Q)$ et

$Q(p) = (p - p_1)^{\alpha_1}(p - p_2)^{\alpha_2} ...(p - p_n)^{\alpha_n}$ où p_i sont des nombres réels ou complexes et α_i sont entiers naturels.

Quand l'excitation d'entrée cesse, il reste en sortie une somme de fonctions de la forme :

$y_i(t) = A_i . e^{p_i t} . t^{\alpha_i - 1}$.

y(t) tend donc vers zéro lorsque la partie réelle de tous les p_i sont négatives.

Conséquence Un système est stable lorsque tous les pôles de sa fonction de transfert ont leur partie réelle strictement négative.

Exercice

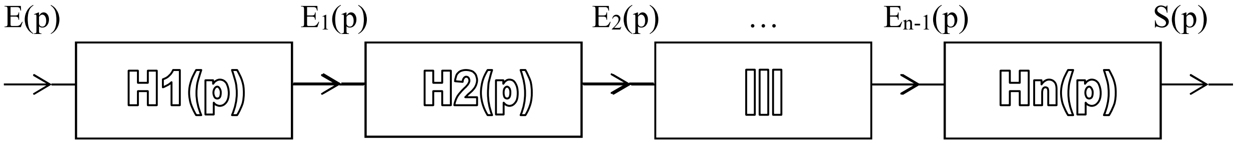
La fonction de transfert d'un système est donnée par : $G(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)}$ où

$H(p) = \left(1 + \frac{K}{p}\right)\frac{1}{p(p+3)}$; K est une constante réelle donnée.

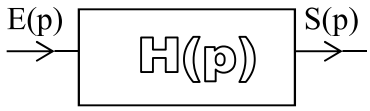
1) Calculer G(p)
2) Vérifier que pour K = 20, on a : $G(p) = \frac{p+20}{(p+4)(p^2-p+5)}$. Déterminer la réponse, dans ce cas, du système à une impulsion de Dirac. Etudier la stabilité du système.
3) Vérifier que pour K = 2.059, la fonction de transfert s'écrit : $G(p) = \frac{p+2,059}{(p+2,9)(p^2+0,1p+0,71)}$ Etudier dans ce cas la stabilité du système.

III. Composition des fonctions de transfert

Soit un système composé de plusieurs systèmes en cascade :



Ce système est équivalent au système :



Où : $\boxed{\mathbf{H(p) = H_1(p) \times H_2(p) \times ... \times H_n(p)}}$

Partie IV : Décomposition en somme d'éléments simples

Décomposer une fraction rationnelle f, définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, en somme d'éléments simples, consiste à l'écrire comme somme de fractions les plus simples possibles.
Il existe deux types d'élément simple :

- **les éléments simples de première espèce : $\frac{a}{x-x_0}, \frac{a}{(x-x_0)^n}$**
- **les éléments simples de seconde espèce : $\frac{ax+b}{x^2+cx+d}, \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$**

où le polynôme x^2+cx+d est à racines complexes conjuguées.

2) La décomposition en somme d'éléments simples par l'exemple

Exemple 1 Déterminer : $L(x) = \int \frac{dx}{x^2-x-2}$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$f(x) = \frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$, sur $\mathbb{R} - \{-1; 2\}$. (-1 et 2 sont les pôles simples de f)

En fait : $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}}$

Eléments simples de « première espèce »

« On décompose en somme d'éléments simples »

« On réduit au même dénominateur »

Pour calculer les coefficients a et b, il existe plusieurs méthodes :

- ou bien réduire au même dénominateur :
  $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2)+b(x+1)}{(x+1)(x-2)}$, puis identifier avec $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ (ce qui peut être long et pénible !)
- ou encore, plus rapide (et peut même se calculer de tête) avec les formules suivantes :
  $\boldsymbol{a} = [(\boldsymbol{x+1})\boldsymbol{f(x)}]_{x=-1} = \left[\frac{1}{x-2}\right]_{x=-1} = -\frac{1}{3}$ et de même : $\boldsymbol{b} = [(\boldsymbol{x-2})\boldsymbol{f(x)}]_{x=2} = \frac{1}{3}$
  En effet, pour le calcul de a, en multipliant la fraction par (x+1), on isole a :
  $$(x+1)f(x) = \frac{1}{(x-2)} = a + \frac{b(x+1)}{x-2}$$
  puis en posant x = -1, on élimine b d'où le résultat suivant : $0 = \frac{1}{(-1-2)} = a + 0$
  En résumé, on retiendra que $\boldsymbol{a} = [(\boldsymbol{x+1})\boldsymbol{f(x)}]_{x=-1}$

Ainsi : $L(x) = \int \frac{dx}{x^2-x-2} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + Cte = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + Cte$

Exemple 2 Déterminer : $M(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}$, sur $\mathbb{R} - \{3\}$. (remarque : x^2+1 est à racines complexes i et –i)

$$\text{En fait : } \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{2x+1}}{\boldsymbol{(x^2+1)(x-3)}} = \frac{\boldsymbol{ax+b}}{\boldsymbol{x^2+1}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{x-3}}$$

Eléments simples de « seconde espèce » et de « première espèce »

- Calcul de c : $\boldsymbol{c} = [(\boldsymbol{x-3})\boldsymbol{f(x)}]_{x=3} = \left[\frac{2x+1}{x^2+1}\right]_{x=3} = \frac{7}{10}$
- Pour calculer les coefficients a et b, il existe plusieurs méthodes :

Méthode 1 : $ai + b = [(x^2+1)f(x)]_{x=i}$	Méthode 2 : (a,b) est la solution du système contenant les 2 équations f(0) et $\lim_{x\to\infty} xf(x)$
En effet, en multipliant la fraction par (x^2+1), on isole a et b : $(\mathbf{x^2+1})\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{2x+1}}{\mathbf{x-3}} = \mathbf{ax+b} + \frac{\mathbf{c(x^2+1)}}{\mathbf{x-3}}$ puis en posant x = i, on élimine c d'où le résultat suivant : $\frac{\boldsymbol{2i+1}}{\boldsymbol{i-3}} = \boldsymbol{a\,i+b}$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{ai+b} = \frac{\boldsymbol{(2i+1)(-i-3)}}{\boldsymbol{(i-3)(-i-3)}}$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{ai+b} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{i}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \\ \boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} \end{cases}$ Remarque : cette méthode est utilisée lorsque les racines complexes sont simples (i et –i, ou 2i et -2i…). Et que d'autres coefficients sont à calculer à l'aide de la méthode 2 (voir exemple 3)	$\begin{cases} \boldsymbol{f(0)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-3}} = \boldsymbol{b} + \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{-3}} \\ \lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{xf(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{2x^2}}{\boldsymbol{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\boldsymbol{ax^2}}{\boldsymbol{x^2}} + \frac{\boldsymbol{cx}}{\boldsymbol{x}}\right) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{b} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \\ \boldsymbol{a+c=0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = -\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} \end{cases}$ Remarque : cette méthode est utilisée lorsque les racines complexes sont trop compliquées.

$$M(x) = \int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x-3)}dx = -\frac{1}{10}\int \frac{7x+1}{x^2+1}dx + \frac{7}{10}\int \frac{dx}{x-3} = -\frac{7}{20}\ln(x^2+1) - \frac{1}{10}\arctan(x) + \frac{7}{10}\ln|x-3| + \text{Cte}$$

Exemple 3 Déterminer : $N(x) = \int \frac{x^2+x}{(x-2)(x+1)^4}dx$

Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)^4} = \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}, \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1; 2\}.$$

Remarques : -1 est un **pôle triple de f** ou de multiplicité 3 et on a **réduit la fraction**, car A et B possédait un facteur commun : x+1.

$$\text{En fait : } \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x-2)(x+1)^3}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{x-2}} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{(x+1)^3}} + \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{(x+1)^2}} + \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{x+1}}$$

- Calcul de a : $\boldsymbol{a} = [(\boldsymbol{x-2})\boldsymbol{f(x)}]_{x=2} = \left[\frac{x}{(x+1)^3}\right]_{x=2} = \frac{2}{27}$
- Calcul de b : $\boldsymbol{b} = [(\boldsymbol{x+1})^3\boldsymbol{f(x)}]_{x=-1} = \left[\frac{x}{x-2}\right]_{x=-1} = \frac{1}{3}$ Eléments simples de « première espèce »
- Calcul de c et d : la méthode précédente ne fonctionne plus.
En effet, $[(x+1)^2 f(x)]_{x=-1} = \left[\frac{x}{(x-2)(x+1)}\right]_{x=-1}$ = division par zéro ! On applique alors la méthode 2 (voir exemple précédent)

$$\begin{cases} f(0) = 0 = \frac{a}{-2} + b + c + d \\ \lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax}{x} + \frac{bx}{x^3} + \frac{cx}{x^2} + \frac{dx}{x}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d = \frac{8}{27} \\ a + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{2}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2}{9} \\ d = -\frac{2}{27} \end{cases}$$

$$N(x) = \int \frac{x}{(x-2)(x+1)^3}dx$$
$$= \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{27}\int \frac{dx}{x+1}$$
$$N(x) = \frac{2}{27}ln|x-2| - \frac{1}{6}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{9}\frac{1}{(x+1)} - \frac{2}{27}ln|x+1| + Cte$$

<u>Remarque</u> : Si -1 avait été un pôle de multiplicité supérieur à 3, exigeant plus de deux équations, on aurait pu utiliser la méthode de la division suivant les puissances croissantes (voie exercices).

<u>Exemple 4</u> Déterminer $Z(x) = \int \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2}dx$
Aucune primitive ne permet de résoudre directement cette intégrale, décomposons en somme d'éléments simples la fraction rationnelle f, définie par :

$$f(x) = \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2} = \frac{x^4-4x^2-x+3}{(x+1)(x-2)}, \text{ sur } \mathbb{R} - \{-1; 2\}.$$

Attention !!! Ici le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, cette fraction possède donc une partie entière !! Pour la déterminer, il faut effectuer la division euclidienne (suivant les puissances décroissantes)

$$\begin{array}{r|l} A(x) = x^4 - 4x^2 - x + 3 & x^2 - x - 2 = B(x) \\ \cline{2-2} -(x^4 - x^3 - 2x^2) & x^2 + x - 1 = Q(x) \\ \cline{1-1} x^3 - 2x^2 - x + 3 & \\ -(x^3 - x^2 - 2x) & \\ \cline{1-1} -x^2 + x + 3 & \\ -(x^2 + x + 2) & \\ \cline{1-1} R(x)=1 & \end{array}$$

A = BQ+R

$$\boldsymbol{f = \frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = Q + \frac{R}{B}}$$

Partie entière de la fraction f

Ainsi $f(x) = \frac{x^4-4x^2-x+3}{x^2-x-2} = x^2 + x - 1 + \frac{1}{(x+1)(x-2)}$
Et $Z(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3}ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + Cte$ (voir exemple 1)

3) Synthèse

Pour décomposer une fraction rationnelle f, définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, en somme d'éléments simples, il faut procéder en plusieurs étapes :

1) Réduire la fraction si A et B ont un facteur commun,

2) Déterminer et mettre de côté la partie entière si deg(A)≥ $deg(B)$,

3) Ecrire la forme de la décomposition en somme d'éléments simples et calculer les coefficients. $f = Q + \frac{R}{B}$ **avec** $g = \frac{R}{B}$ **et :**

$$g(x) = \frac{R(x)}{(x-x_0)^n (x^2+dx+k)^p \dots}$$

$$= \frac{a_n}{(x-x_0)^n} + \frac{a_{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1}{x-x_0} + \frac{b_p x + c_p}{(x^2+dx+k)^p} + \frac{b_{p-1}x + c_{p-1}}{(x^2+dx+k)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1 x + c_1}{x^2+dx+k} + \cdots$$

où le polynôme $x^2 + dx + k$ est à racines complexes conjuguées α et $\bar{\alpha}$

$a_n = [(x-x_0)^n g(x)]_{x=x_0}$; $b_p\alpha + c_p = [(x^2+dx+k)^p g(x)]_{x=\alpha}$ etc… Pour obtenir les autres coefficients, on pourra remplacer x par autant de valeurs à déterminer et résoudre le système. L'équation $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ est très intéressante, puisqu'elle est toujours simple à résoudre.