Corrigé DM16 & TD

page 14 chapitre 7

III. Intégrale d'une fraction rationnelle

1) Introduction et Définitions

Une fraction rationnelle est une fonction f, définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ où A et B sont des polynômes à coefficients réels. f est alors continue sur $\mathbb{R}$ privé des racines du polynôme B.
On appelle pôles de la fraction f, les racines de son dénominateur B.

Quelques formules nous permettent d'intégrer certaines fractions rationnelles :

$$\int \frac{U'}{U} dx = \ln(|U|) + cte \ ; \ \int \frac{U'}{1+U^2} .dx = \arctan(U) + cte \ ; \int \frac{U'}{U^n} dx = -\frac{1}{(n-1)U^{n-1}} + cte.$$

Par exemple :

$$\int \frac{5x^4 - 6x^2 + 8}{x^5 - 2x^3 + 8x - 1} dx = \cdots$$ ... ...

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \cdots$$ ... ...

$$\int \frac{dx}{(x-3)^7} = \cdots$$ ... ...

page 14 chapitre 7

1) Soit $\int \frac{5x^4 - 6x^2 + 8}{x^5 - 2x^3 + 8x - 1} dx$ de la forme $\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + cte$ donc :

$U = x^5 - 2x^3 + 8x - 1$

$U' = 5x^4 - 6x^2 + 8.$

$$\boxed{\int \frac{5x^4 - 6x^2 + 8}{x^5 - 2x^3 + 8x - 1} dx = \ln|x^5 - 2x^3 + 8x - 1| + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

mise sous forme canonique.

2) Soit : $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 1} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 1}$

$\Delta < 0$

$\int \frac{U'}{U^2+1} dx = \arctan U + cte$

ici $U = x + 2 \Rightarrow U' = 1$

donc $$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \arctan(x+2) + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$\underbrace{x^2+4x}+\underbrace{5}_{4+1}$

$(x+2)^2 + 1$

$x^2 + 4x + 4$

3) Soit $$\boxed{\int \frac{dx}{(x-3)^7} = -\frac{1}{6(x-3)^6} + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\int U' U^{\alpha} dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$

ici $\alpha = -7$ $\quad U = x - 3 \Rightarrow U' = 1$

$\int U' U^{-7} dx = \frac{U^{-6}}{-6} + cte = \frac{-1}{6U^6} + cte$

Exercice 1

2) $N(x) = \int \underbrace{\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}}_{= f(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}$

$B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

$B(1) = 0$ B est divisible par $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + x - 1 & x - 1 \\ \hline -(x^3 - x^2) & x^2 + 1 \\ \hline x - 1 & \\ -(x - 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2+1)$

$(x-1)(x+j)(x-j)$

Les pôles sont : $x = 1$

$x = -j$

$x = +j$

N(x) est irréductible il n'y a pas de facteur en commun.

page 19 chapitre 7

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-j)(x+j)}$$

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)\cdot(x^2+1)}$$

deg A < deg B

il n'admet pas de partie entière.

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{(x^2+1)}$$ est la DSES dans $\mathbb{C}$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{-x+1}{x^2+1}$$

- $a = \left[(x-1)\times f(x)\right]_{x=1} = \left[\frac{1}{x^2+1}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}$
- $bj+c \quad \left[(x^2+1)\cdot f(x)\right]_{x=j}$
- $bj+c = \left[\frac{x}{x-1}\right]_{x=j} = \frac{j}{j-1} = \frac{j(-j-1)}{2} = \frac{1-j}{2} = bj+c$

$\Leftrightarrow$ $b = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$

alors $f(x) = \dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{-x+1}{2(x^2+1)}$

$$f(x) = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

$\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + cte$

$\int \frac{u'}{1+u^2}dx = \arctan u + ct$

$$N(x) = \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\arctan x + cte,\ cte \in \mathbb{R}.$$

alors $N(x) = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan + cte,\ cte \in \mathbb{R}.$

Exercice 4

$$V(t) = \int (t^3 + 2t + 3) \ln t \, dt$$

$$u(t) = \ln t \longrightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = t^3 + 2t + 3 \longrightarrow v(t) = \frac{t^4}{4} + t^2 + 3t$$

$$V(t) = \ln(t) \times \left(\frac{t^4}{4} + t^2 + 3t\right) - \int \left(\frac{1}{t}\right) \times \left(\frac{t^4}{4} + t^2 + 3t\right) dt$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} + t^2 + 3t\right) \ln t - \int \left(\frac{t^3}{4} + t + 3\right) dt$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} + t^2 + 3t\right) \ln t - \left(\frac{t^4}{16} + \frac{t^2}{2} + 3t\right) + cte$$

$$= \left(\frac{t^4}{4} + t^2 + 3t\right) \ln t - \frac{t^4}{16} - \frac{t^2}{2} - 3t + cte, \; cte \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes :

page 19 chapitre 7

$$K(x)=\int(1+\tan^2(x)).\tan^3(x).dx \; ; \; L(x)=\int\frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}.dx \; ; \; M(x)=\int x^2e^{3x}.dx \; ; \; N=\int_0^1\frac{dt}{e^{-t}+1} \; ;$$

$$P=\int_1^3\frac{x}{x^4+1}dx \; ; \; Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x).\sin^5(x).dx \; ; \; T(x)=\int\frac{dx}{x^2-6x+13} \; ;$$

$$U(x)=\int\frac{x^4}{x^4+2x^3-2x-1}dx \; ; \quad V(t)=\int(t^3+2t+3).\ln(t).dt \; ; \quad I=\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\sin^3(x).dx$$

$$P=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{2x}{x^4+1}dx \qquad \int\frac{u'}{u^2+1}dx = \text{Arctan}\,u + c\bar{t}e$$

$$U=x^2 \Rightarrow U'=2x$$

$$P=\frac{1}{2}\left[\text{Arctan}(x^2)\right]_1^3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\text{Arctan}\,9 - \underbrace{\text{Arctan}\,1}_{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$* \quad Q = \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \sin^5 x \, dx$$

$$\int U' U^{\alpha} dx = \frac{U^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$$

$$U = \sin x \Rightarrow U' = \cos x$$

$$Q = \left[\frac{\sin^6 x}{6} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\sin^6 \frac{\pi}{2}}{6} - \underbrace{\frac{\sin^6 0}{6}}_{=0} = \frac{1}{6}$$

$$* \quad T(x) = \int \frac{dx}{\underbrace{x^2 - 6x + 13}_{\Delta = 36 - 4 \times 13 < 0}}$$

$$\int \frac{U'}{U^2+1} dx = \operatorname{Arctan} U + cte$$

$$\int \frac{1}{\underbrace{x^2-6x+13}_{\underbrace{x^2-6x+9}+4 \,=\, (x-3)^2+4}} dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+4} dx = \int \frac{1}{4\left(\frac{(x-3)^2}{4}+1\right)} dx = \frac{1}{4} \times 2 \int \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-3}{2}\right) + cte$$

$$U = \frac{x-3}{2} \Rightarrow U' = \frac{1}{2}$$

$$U = \frac{1}{2}(x-3)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2 x \cdot \sin^3 x}_{f(x)} \, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} -\ f \text{ est de période } 2\pi \\ -\ [0\,;2\pi] \text{ est de longueur } 2\pi \end{array}\right\} \ I = \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos^2 x \cdot \sin^3 x}_{\text{impaire}} \, dx = 0$$