DM13
Transformation de Laplace

TP7 Suite

1) Exercice 3 :

Calculer la transformée inverse de chaque fraction décomposée dans les exercices 1 et 2

$$F(s) = \frac{\frac{-\tau}{\tau^2+1}\, s + \frac{1}{\tau^2+1}}{s^2+1} + \frac{\frac{\tau^2}{1+\tau^2}}{\tau s+1}$$

$$\frac{1}{s^2} + \left(\frac{-1+\tau}{s}\right) + \frac{\tau(-1+\tau)}{\tau s+1}$$

$$F(s) = \frac{\frac{-\tau}{\tau^2+1}s + \frac{1}{\tau^2+1}}{s^2+1} + \frac{\frac{\tau^2}{1+\tau^2}}{\tau s+1}$$

Conclusion: $F(S) = \dfrac{\frac{-\tau S}{\tau^2+1} + \frac{1}{\tau^2+1}}{S^2+1} + \dfrac{\frac{\tau^2}{\tau^2+1}}{\tau S+1}$

$$F(S) = \frac{-\tau S\ 1}{(S^2+1)(\tau^2+1)} + \frac{\tau^2}{(\tau S+1)(\tau^2+1)}$$

c) $F(S) = \dfrac{-\tau}{\tau^2+1} \times \dfrac{S}{S^2+1} + \dfrac{1}{\tau^2+1} \times \dfrac{1}{S^2+1} + \dfrac{\tau^2}{\tau^2+1} \times \dfrac{1}{\tau S+1}$

$$TL^{-1}(F(S)) = \frac{-\tau}{\tau^2+1} \times \cos(t) + \frac{1}{\tau^2+1} \sin(t) + \frac{\tau}{\tau^2+1} e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

$$TL^{-1}\left(\frac{1}{S+a}\right) = e^{-at}$$

$$\frac{\tau^2}{1+\tau^2} TL^{-1}\left(\frac{1}{\tau(S+\frac{1}{\tau})}\right)$$

$$\frac{\tau^2}{1+\tau^2} \times \frac{1}{\tau} TL^{-1}\left(\frac{1}{S+\frac{1}{\tau}}\right)$$

$$\frac{\tau}{1+\tau^2} \times TL^{-1}\left(\frac{1}{S+\frac{1}{\tau}}\right)$$

$$\frac{1}{s^2} + \left(\frac{-1+\tau}{s}\right) + \frac{\tau(-1+\tau)}{\tau s+1}$$

2) On note $G(s) = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{-1+\tau}{s}\right) + \frac{\tau(-1+\tau)}{\tau s+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1+\tau}{s}\right] = -1+\tau \longrightarrow \text{car } \frac{1}{s} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tau(-1+\tau)}{\tau s+1}\right] = (-1+\tau)\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

je sais que $\tau s + 1 = \tau\left(s + \frac{1}{\tau}\right)$ donc j'obtient $\frac{\cancel{\tau}(-1+\tau)}{\cancel{\tau}\left(s+\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{-1+\tau}{s+\frac{1}{\tau}}$

page 21 chapitre 6

2) Finir l'exercice commencé en cours voir prise de notes si besoin est.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :
s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t) ; s(0) = e(0) = 0. Soit S(p) = $\mathcal{L}$[s(t)] et E(p) = $\mathcal{L}$[e(t)].

- ✓ Calculer la fonction de transfert H(p) de ce circuit : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$
- ✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.
- ✓ On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).

✓ On appelle **réponse indicielle** d'un circuit, le signal de sortie obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un échelon unité. Déterminer la réponse indicielle de ce circuit.

page 21 chapitre 6

√

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{2p+1}{p+3} \cdot \frac{1}{p} = \frac{2p+1}{p(p+3)}$$

<u>DSES:</u> $\dfrac{2p+1}{p(p+3)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+3}$

$$A = \left[p \cdot \frac{2p+1}{p(p+3)}\right]_{p=0} = \left[\frac{2p+1}{p+3}\right]_{p=0} = \frac{1}{3}$$

$$B = \left[(p+3) \cdot \frac{2p+1}{p(p+3)}\right]_{p=-3} = \left[\frac{2p+1}{p}\right]_{p=-3} = \frac{2\times(-3)+1}{-3} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

d'où $S(p) = \dfrac{1}{3p} + \dfrac{5}{3(p+3)}$

On applique la transformée inverse de Laplace

avec $\dfrac{1}{3p} + \dfrac{5}{3(p+3)} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3} e^{-3t}$

donc la réponse indicielle est $\boxed{\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{3} e^{-3t}}$.

2) Exemple de circuit du premier ordre Etude du filtre passe-haut.

Soit un circuit dans lequel la sortie s(t) et l'entrée e(t) vérifient l'équation différentielle :

s'(t)+3.s(t) = 2.e'(t) + e(t) ; s(0) = e(0) = 0. Soit S(p) = $\mathcal{L}$[s(t)] et E(p) = $\mathcal{L}$[e(t)].

p. 19

$H(p) = \boxed{\dfrac{2p+1}{p+3}}$

- ✓ On appelle **réponse harmonique** d'un circuit, le signal de sortie s obtenu, lorsque le signal d'entrée e est un signal sinusoïdal. Déterminer la réponse harmonique de ce circuit avec e(t) =5.cos(3t).
- ✓ Montrer qu'après disparition du régime transitoire, la réponse de ce circuit à $e(t) = 5\cos(3t)$ est de la forme : $s(t) = 5A\cos[3t + \varphi]$ avec :

  $A = |H(3j)|$ et $\varphi = \mathrm{Arg}(H(3j))$.

p. 21

Plus généralement, on admet que : Après disparition du régime transitoire, la réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale $e(t) = e_0\cos(\omega t)$ est de la forme :

$$s(t) = e_0 A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)] \text{ avec : } A(\omega) = |H(j\omega)| \text{ et } \varphi(\omega) = \mathrm{Arg}(H(j\omega)).$$

p. 21 Si $e(t) = 5\cos(3t)$ Alors $E(p) = \dfrac{5p}{p^2+9}$ et $S(p) = H(p).E(p) = \dfrac{5p(2p+1)}{(p^2+9)(p+3)}$ DSES dans $\mathbb{R}$

DSES dans $\mathbb{R}$ de $S(p) = \dfrac{5p(2p+1)}{(p^2+9)\cdot(p+3)} = \dfrac{A(p)}{B(p)}$

$B(p)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$. les pôles de la fraction S sont : $-3j$ et $3j$ (simples)

S est irréductible ; sans partie entière car $\deg A = 2 < \underbrace{\deg B}_{=3}$ $\quad -3$ simple.

$$S(p) = \frac{ap+b}{p^2+9} + \frac{c}{p+3}$$

- $a\cdot 3j + b = \left[(p^2+9)S(p)\right]_{p=3j} = \dfrac{15j\,(6j+1)}{3j+3} = \dfrac{\cancel{3}\times 5j\,(6j+1)}{\cancel{3}\,(1+j)} = \dfrac{-30+5j}{1+j} \times \dfrac{1-j}{1-j}$

$$3aj + b = \frac{-25+35j}{2} \iff \begin{cases} a = \dfrac{35}{6} \\ b = -\dfrac{25}{2} \end{cases}$$

- $c = \left[(p+3)S(p)\right]_{p=-3} = \dfrac{-15(-5)}{18} = \dfrac{25}{6}$

$$S(p) = \frac{\frac{35}{6}p - \frac{25}{2}}{p^2+9} + \frac{25}{6}\frac{1}{p+3}$$

$$S(p) = \frac{35}{6}\frac{p}{p^2+9} - \frac{25}{2\times 3}\frac{1\times 3}{p^2+9} + \frac{25}{6}\frac{1}{p+3}$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)] = \left(\frac{35}{6}\cos(3t) - \frac{25}{6}\sin(3t) + \frac{25}{6}e^{-3t}\right).U(t) \text{ est la réponse.}$$

$$s(t) = \frac{5}{6}\left(7\cos(3t) - 5\sin(3t)\right) + \underbrace{\frac{25}{6}e^{-3t}}_{\text{régime transitoire}}$$

$$a\cos(3t) + b\sin(3t)$$

$$= A\cos(3t-\varphi) \quad \text{régime permanent}$$

Remarque :

$5\cos(3t)$

$|H(3j)|$

où $\begin{cases} A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74} = |a+jb| \\ \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{5}{7}\right) \end{cases}$

$\arg(H(3j))$

$$s(t) = \underbrace{\frac{5\sqrt{74}}{6}.\cos\left(3t - \arctan(5/7)\right)}_{\text{régime permanent}} + \underbrace{\frac{25}{6}e^{-3t}}_{\text{régime transitoire} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$$

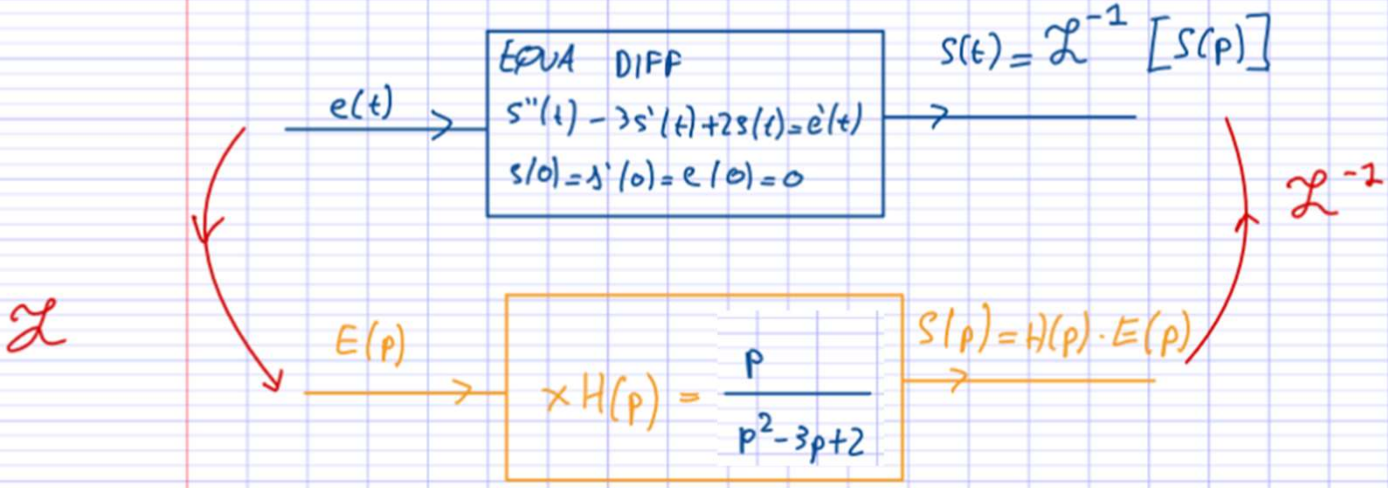
3) Résoudre le problème.

Soit le circuit caractérisé par l'équation différentielle ci-dessous, reliant $t \mapsto e(t)$ et $t \longmapsto s(t)$ les signaux respectivement entrée et sortie.

$$\begin{cases} s'' - 3s' + 2s = e' \\ s(0) = s'(0) = e(0) = 0 \end{cases}$$

1. Faire un schéma
2. Déterminer la fonction de transfert du circuit $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$
3. Déterminer la réponse impulsionnelle du circuit
   (chercher $s(t)$ lorsque $e(t) = \delta(t) \leftarrow$ Dirac)
4. Déterminer la réponse indicielle du circuit
   (chercher $s(t)$ lorsque $e(t) = U(t) \leftarrow$ échelon unité)

$$\begin{cases} s'' - 3s' + 2s = e' \\ s(0) = s'(0) = e(0) = 0 \end{cases}$$



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$$p^2\, S(p) - 3p\, S(p) + 2\, S(p) = p\, E(p)$$

$$\Longleftrightarrow (p^2 - 3p + 2)\, S(p) = p\, E(p)$$

$$\Longleftrightarrow \quad H(p) = \frac{p}{p^2 - 3p + 2}$$

Réponse impulsionnelle :

Si $e(t) = \delta(t)$ alors $E(p) = 1$ donc $S(p) = H(p) \cdot E(p)$

$$S(p) = \frac{p}{p^2 - 3p + 2}$$

1 est racine de $p^2 - 3p + 2$.

$$\begin{array}{l|l} p^2 - 3p + 2 & p - 1 \\ \hline -(p^2 - p) & p - 2 \\ \hline \quad -2p + 2 & \\ -(-2p + 2) & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

Donc $S(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p-2)} = \dfrac{a}{p-1} + \dfrac{b}{p-2}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$a = \lim\limits_{p \to 1} \dfrac{p}{p-2} = -1$ et $b = \lim\limits_{p \to 2} \dfrac{p}{p-1} = 2$

Soit $S(p) = -\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{2}{p-2}$

donc $\boxed{s(t) = -e^{t} + 2e^{2t}}$ est la réponse impulsionnelle.

Réponse indicielle :

Si $e(t) = 1$ alors $E(p) = \frac{1}{p}$ donc $S(p) = E(p) \cdot H(p)$

$$S(p) = \frac{p}{p\,(p-1)(p-2)} = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{a}{p-1} + \frac{b}{p-2} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$a = \lim_{p \to 1} \frac{1}{p-2} = -1 \quad \text{et} \quad b = \lim_{p \to 2} \frac{1}{p-1} = 1$$

$$\text{Donc } S(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$$

Donc $\boxed{s(t) = e^{2t} - e^{t}}$ est la réponse indicielle