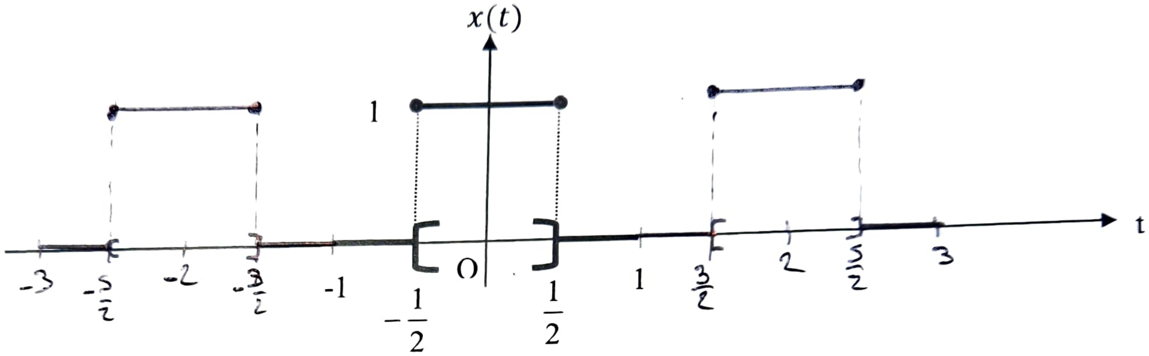
Extrait du sujet de DS de l'an dernier :

<u>Exercice 2</u> : Série de Fourier (8 pts)

Soit x, le signal périodique de période 2, défini par : $x(t) = \begin{cases} 1 \ si \ -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 \ si \ -1<t<-\frac{1}{2} \\ 0 \ si \ \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$



1) Compléter la représentation graphique de x ci-dessus sur l'intervalle [-3,3]

2) Déterminer les coefficients de Fourier de x :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{x(t)\,dt}_{pair} = \int_{0}^{1} x(t)\,dt = \int_0^{1/2} 1\,dt + \int_{1/2}^{1} 0\,dt = [t]_0^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underbrace{\underbrace{x(t)\times\cos(p\omega t)}_{pair \times pair}}_{pair}\,dt = \int_{-1}^{1} \underbrace{x(t)\times\cos(p\pi t)}_{pair}\,dt = 2\int_0^1 x(t)\times\cos(p\pi t)\,dt = 2\left(\int_0^{1/2}\cos(p\pi t)\,dt + \int_{1/2}^{1} 0\times\cos(p\pi t)\,dt\right)$$

$$a_p = 2\left[\frac{\sin(p\pi t)}{p\pi}\right]_0^{1/2} = \frac{2\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}{p\pi}$$

$$b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \underbrace{\underbrace{x(t)\times\sin(p\omega t)}_{pair \times impair}}_{impair}\,dt = \int_{-1}^{1}\underbrace{x(t)\times\sin(p\omega t)}_{impair} = 0$$

3) Déterminer la valeur moyenne, le fondamental et les harmoniques de rang 2 et 3 du signal x :

$x_{moy}(t) = a_0 = \frac{1}{2}$

$H_p(t) = a_p \times \cos(p\pi\omega t) + \underbrace{b_p \times \sin(p\omega t)}_{=0}$

$H_1(t) = a_1 \times \cos(\pi t) + 0 = \frac{2\sin(\frac{\pi}{2})}{\pi} \times \cos(\pi t) = \frac{2}{\pi} \times \cos(\pi t)$

$H_2(t) = a_2 \times \cos(2\pi t) = \frac{2\sin(\frac{2\pi}{2})}{2\pi} \times \cos(2\pi t) = \frac{\overbrace{\sin(\pi)}^{=0}}{\pi} \times \cos(2\pi t) = 0$

$H_3(t) = a_3 \times \cos(3\pi t) = \frac{2\sin(\frac{3\pi}{2})}{3\pi} \times \cos(3\pi t) = \frac{-2}{3\pi} \times \cos(3\pi t)$

Montrer que les harmoniques de rang pair sont nulles, on posera p = 2k

$H_{2k}(t) = a_{2k} \times \cos(2k\pi t) = \frac{2\sin(\frac{2k\pi}{2})}{2k\pi} \times \cos(2k\pi t) = \frac{\overset{0}{\sin(k\pi)}}{k\pi} \times \cos(2k\pi t) = 0$

4) Quelle est l'expression simplifiée de la série de Fourier de x ?

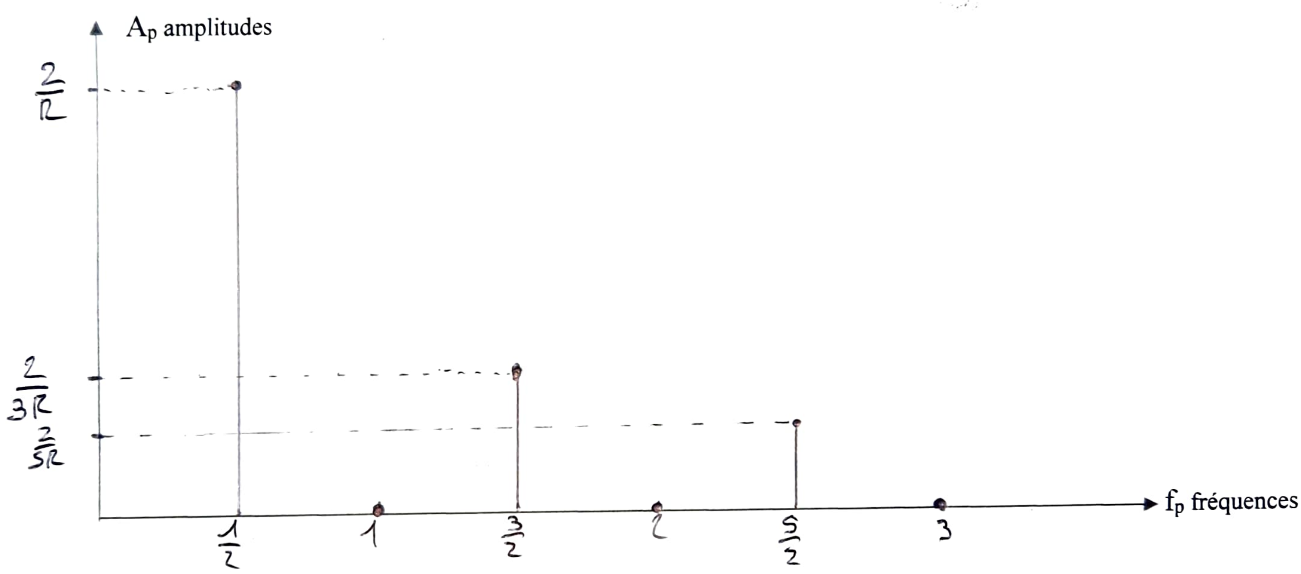
$S_x(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \times \cos(p\omega t) + \underbrace{b_p \times \sin(p\omega t)}_{0} = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2\sin(\frac{p\pi}{2})}{p\pi} \times \cos(p\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \times \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{p\pi}{2})}{p} \times \cos(p\pi t)$

$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2})}{2k+1} \times \cos((2k+1)\pi t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \times \cos((2k+1)\pi t)$

$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$

5) Tracer le spectre de x. Pour cela compléter d'abord le tableau suivant :

p	1	2	3	4	5	6
$f_p = \frac{p\omega}{2\pi}$ Fréquence de l'harmonique de rang p	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$A_p = \sqrt{a_p^2 + b_p^2}$ Amplitude de l'harmonique de rang p	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$	0



Formulaire.

<u>Séries de Fourier</u>

Soit x une fonction de période T, intégrable sur tout intervalle $[t_0, t_0+T]$.
On appelle <u>série de Fourier réelle de x</u> la série suivante :

$a_0 + \sum_{p=1}^{+\infty}(a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t))$, **où les suites réelles $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont définies de la façon suivante :**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).dt \;;\; a_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\cos(p\omega t).dt \;;\; b_p = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).\sin(p\omega t).dt \text{ pour } p \geq 1,$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a_0 **est <u>la valeur moyenne</u> du signal x.**
<u>L'harmonique de rang p</u> est le signal : $H_p(t) = a_p.\cos(p\omega t) + b_p.\sin(p\omega t)$
<u>Le fondamental</u> est l'harmonique de rang 1 : $H_1(t) = a_1.\cos(\omega t) + b_1.\sin(\omega t)$