DM16
DS Transformation de Laplace

Exercice 1 : **Transformation de Laplace et EDLCC du premier ordre. (6 pts)**

Résoudre à l'aide de la transformation de Laplace l'EDLCC suivante : $\begin{cases} 3y' - 2y = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

On pose $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$ et on applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle. On obtient :

$$3\,\mathcal{L}[y'] - 2\,\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[1]$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(pY(p) - y(0)) - 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3pY(p) - 2Y(p) - 3 = \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(p)\cdot(3p-2) = \frac{1}{p} + 3 = \frac{1+3p}{p}$$

$\Leftrightarrow \quad Y(p) = \dfrac{1+3p}{p(3p-2)} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$. Comme $Y(p)$ ne se trouve pas dans le tableau de la transformation de Laplace, on la décompose en somme d'éléments simples :

$$Y(p) = \frac{3p+1}{p(3p-2)} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

1. $B(p) = p.(3p-2)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (c'est le produit de deux polynômes de degré 1 : p et $3p-2$
2. $Y(p)$ est irréductible car A et B n'ont pas de facteur commun
3. $\deg A = 1 < \deg B = 2$, Y n'a donc pas de partie entière
4. $Y(p) = \dfrac{3p+1}{p(3p-2)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{3p-2}$

$$a = \left[p\,Y(p)\right]_{p=0} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b = \left[(3p-2)\,Y(p)\right]_{p=2/3} = \frac{3}{2/3} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Donc $$Y(p) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{p} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{3(p-2/3)}$$

et $$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = -\frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] + \frac{3}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-2/3}\right]$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cdot U(t) + \frac{3}{2}\cdot e^{\frac{2}{3}t}\cdot U(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(-1+3e^{\frac{2}{3}t}\right)\cdot U(t)$$ est la solution cherchée.

<u>Exercice 2</u> : Transformation de Laplace et fonction de transfert. (8 pts)

Un système « entrée-sortie » est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^2s}{dt^2}(t) - 4\frac{ds}{dt}(t) - 12s(t) = \frac{de}{dt}(t) \\ e(0) = s(0) = s'(0) = 0 \end{cases}$$

a) On note E(p) et S(p) les transformées de Laplace respectives de e(t) et s(t). Déterminer H(p), la fonction de transfert de ce système.

$\mathcal{L}[s''(t) - 4s'(t) - 12s(t)] = \mathcal{L}[e'(t)]$

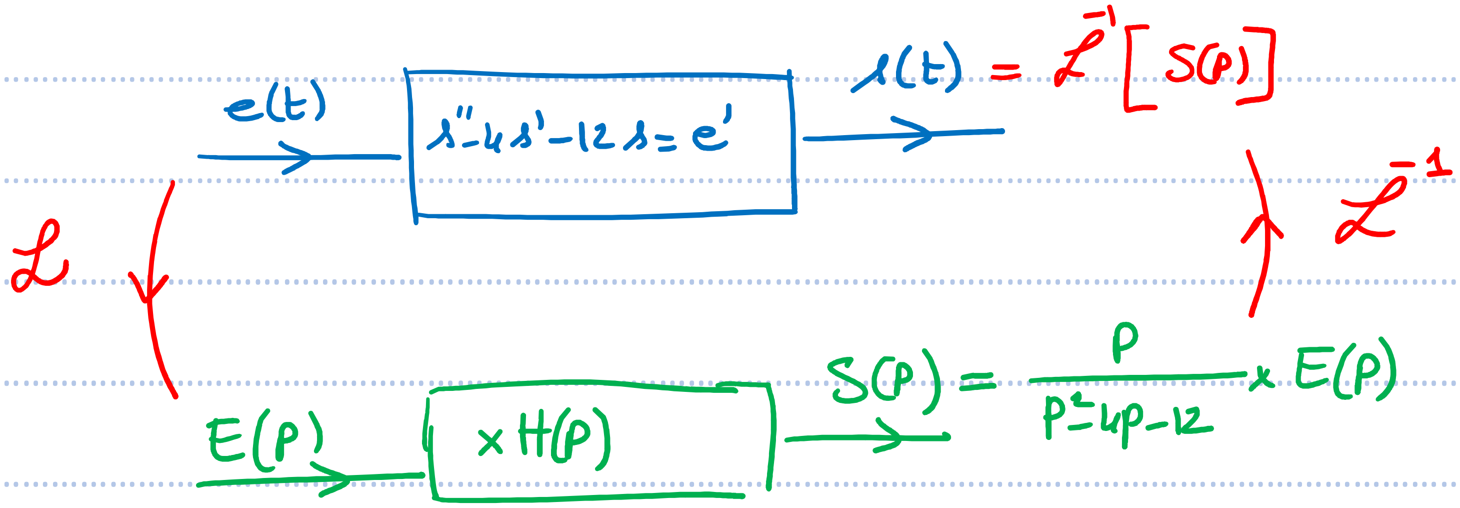
$\Longleftrightarrow p^2 S(p) - p s(0) - s'(0) - 4(pS(p) - s(0)) - 12 S(p) = pE(p) - e(0)$

$\Longleftrightarrow S(p).(p^2 - 4p - 12) = pE(p)$

$\Longleftrightarrow \frac{S(p)}{E(p)}.(p^2 - 4p - 12) = p \Longleftrightarrow \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{p}{p^2 - 4p - 12}$

$\Longleftrightarrow H(p) = \frac{p}{p^2 - 4p - 12}$ est la fonction de transfert.

b) Déterminer la réponse impulsionnelle (lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac)



Ici $e(t) = \delta(t)$ donc $E(p) = 1$

et $S(p) = H(p) \times E(p) = \dfrac{p}{p^2 - 4p - 12}$

d'où $s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2 - 4p - 12}\right]$ $\boxed{\text{DSES}}$

DSES de $S(p) = \dfrac{p}{p^2-4p-12} = \dfrac{A(p)}{B(p)}$

1. On résout $B(p)=0$ $\Delta = 16-4(-12) = 16+48 = 64$

$p_1 = \dfrac{4+8}{2} = 6$ et $p_2 = \dfrac{4-8}{2} = -2$

Ainsi $B(p) = (p-6)(p+2)$

2 & 3. S est irréductible et sans partie entière

4. $S(p) = \dfrac{a}{p-6} + \dfrac{b}{p+2} = \dfrac{p}{(p-6)(p+2)}$

$a = \left[(p-6)S(p)\right]_{p=6} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$; $b = \left[(p+2)S(p)\right]_{p=-2} = \dfrac{-2}{-8} = \dfrac{1}{4}$

Ainsi $S(p) = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{p-6} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p+2}$ et $s(t) = \left(\dfrac{3}{4}e^{6t} + \dfrac{1}{4}e^{-2t}\right).U(t)$ est la réponse impulsionnelle.

c) Déterminer la réponse indicielle (lorsque le signal d'entrée est un échelon-unité)

Ici $e(t) = U(t)$ donc $E(p) = \frac{1}{p}$ et $S(p) = H(p) \times E(p) = \frac{1}{p^2 - 4p - 12}$

DSES de $S(p) = \frac{1}{(p-6)(p+2)} = \frac{a}{p-6} + \frac{b}{p+2}$

$$a = \left[(p-6)S(p)\right]_{p=6} = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad b = \left[(p+2)\,S(p)\right]_{p=-2} = \frac{1}{-8}$$

donc $S(p) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{p-6} - \frac{1}{p+2}\right)$ et $s(t) = \frac{1}{8}\left(e^{6t} - e^{-2t}\right).U(t)$ est la réponse indicielle.

Exercice 3 : **Transformation de Laplace et EDLCC du second ordre. (6 pts)**

Résoudre à l'aide de la transformation de Laplace l'EDLCC suivante : $\begin{cases} y'' + \omega^2 y = E \\ y(0) = 0 \; et \; y'(0) = 0 \end{cases}$

où $\omega > 0$ et E sont des constantes.

On pose $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$ et on obtient :

$$\mathcal{L}[y''] + \omega^2 \mathcal{L}[y] = E\mathcal{L}[1].$$

$$p^2 Y(p) - p\,y(0) - y'(0) + \omega^2 Y(p) = \frac{E}{p}$$

$$\Longleftrightarrow (p^2+\omega^2)\,Y(p) = \frac{E}{p} \Longleftrightarrow Y(p) = \frac{E}{\underbrace{p(p^2+\omega^2)}_{p(p+j\omega)(p-j\omega) \text{ dans } \mathbb{C}}}$$

factorisé dans $\mathbb{R}$

irréductible et sans partie entière

DSES dans $\mathbb{R}$ de $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{E}{p(p^2+\omega^2)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+\omega^2}$$

$$Y(p) = \frac{E}{p(p^2+\omega^2)} = \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+\omega^2}$$

$$a = \left[p\,Y(p)\right]_{p=0} = \frac{E}{\omega^2}$$

$$bj\omega + c = \left[(p^2+\omega^2)Y(p)\right]_{p=j\omega} = \frac{E}{j\omega} \times \frac{-j}{-j}$$

$$bj\omega + c = -j\frac{E}{\omega} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = \frac{E}{\omega^2} \end{cases}$$

Ainsi $Y(p) = \frac{E}{\omega^2} \cdot \frac{1}{p} + \frac{E}{\omega^2} \cdot \frac{p}{p^2+\omega^2} = \frac{E}{\omega^2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+\omega^2}\right)$

$y(t) = \frac{E}{\omega^2}\left(1 + \cos(\omega t)\right) \cdot u(t)$ est la solution cherchée.