

Bastien

Canoy

GC

TP n° 12

$$y'' + y' - 2y = x^2 - 4 : (E)$$

On résout $y'' + y' - 2y = 0$

On résout l'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 1 + 8 = 9$$

$$\Delta > 0 : r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -2$$

Les solutions de (E) sont alors $y_0(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} = K_1 e^t + K_2 e^{-2t}$

On cherche une solution particulière de (E):

$$\left. \begin{array}{l} \text{On pose } y_p = ax^2 + bx + c \\ y'_p = 2ax + b \\ y''_p = 2a \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2a + 2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow -2ax^2 + 2ax - 2bx + 2a + b - 2c = x^2 - 4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ 2a + b - 2c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ -1 - 2b = 0 \\ -1 + b - 2c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ -1 - \frac{1}{2} - 2c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{donc } y_p = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

Les solutions sont donc : $y(t) = y_0(t) = y_p(t) = K_1 e^t + K_2 e^{-2t} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{5}{4}$

$$\text{or } y'(t) = K_1 e^t - 2K_2 e^{-2t} - t - \frac{1}{2}$$

On pose $K_1 = 2K_2 + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} y(0) &= K_1 e^0 + K_2 e^0 + \frac{5}{4} = K_1 + K_2 + \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow K_1 + K_2 = \frac{1}{4} \\ y'(0) &= K_1 e^0 - 2K_2 e^0 - \frac{1}{2} = K_1 - 2K_2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow K_1 - 2K_2 = \frac{1}{2} \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = \frac{1}{4} \\ K_1 - 2K_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + 2K_2 + K_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3K_2 = -\frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow K_2 = -\frac{1}{4} \\ K_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$(E) \text{ a donc pour solution : } y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{5}{4}$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = E ; E \in \mathbb{R} ; R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\equiv L i''(t) + R i'(t) + \frac{i(t)}{C} = E$$

On résout $L i'' + R i' + \frac{i}{C} = 0$

On résout l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$ avec $a=L, b=R, c=\frac{1}{C}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = R^2 - 4 \times L \times \frac{1}{C} = \frac{4L}{C} - \frac{4L}{C} = 0$$

$\Delta = 0$, r_1 est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de (E) sont alors $y_0(t) = e^{r_1 t} (K_1 + K_2 t)$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

$$r_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-R}{2 \times L} = \frac{-2\sqrt{\frac{L}{C}}}{2L} = \frac{-\sqrt{\frac{L}{C}}}{L} = -\sqrt{\frac{L}{L^2 C}} = -\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

alors : $y_0(t) = e^{-\sqrt{\frac{1}{LC}} t} (K_1 + K_2 t)$

On cherche une solution particulière de (E) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{on pose } i_p = a \\ i'_p = 0 \\ i''_p = 0 \end{array} \right\} = 0 \times L + 0 \times R + \frac{a}{C} = E \Leftrightarrow \frac{a}{C} = E \Leftrightarrow a = EC$$

donc $i_p(t) = EC$

Les solutions de (E) sont $i(t) = i_0(t) + i_p(t) = e^{-\sqrt{\frac{1}{LC}} t} (K_1 + K_2 t) + EC$