Chap Intégrales : page 19 – ex.3

Exercice 3 A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$t=x-2$ $\quad x=1+\sin t$ $\quad x=\ln t$

$$P=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+5} \quad ; \quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{(1+\sin(t))^2}dt \quad ; \quad K=\int_1^e \frac{\ln^3(t)+\ln^2(t)+1}{t}dt \; ;$$

$$L=\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$ (on posera x=tan(t)).

Chap EDLCC : page 16 – ex.1 : 2) avec CI y(0)=0 et y'(0)=1

Exercice 1 **EDLCC du 2nd ordre**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''-y'-2.y=6.x^2$

α 2) $y''+2.y'+5.y=\cos(2x)+2.\sin(2x)$ $\longrightarrow$ avec $y(0)=0$ et $y'(0)=1$

α 3) $\begin{cases} y''-4.y'+3.y=-\frac{4}{5}.x.e^{-x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}-\omega^2 y(t)=0 \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=A \end{cases}$ où ω est une constante réelle non nulle.

5) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y(t)=0 \\ y(0)=1,\ \ y'(0)=0 \end{cases}$ où ω est une constante réelle non nulle.

Chap Intégrales : page 19 – ex.3

Exercice 3 A l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$P=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+5} \quad ; \quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{(1+\sin(t))^2}dt \;;\; K=\int_1^e \frac{\ln^3(t)+\ln^2(t)+1}{t}dt \;;$$

$$L=\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$ (on posera x=tan(t)).

$P=\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4x+5}$ avec $t=x-2$

Bornes : $\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t=-1 \end{cases}$

Relation dx et dt : $t=x-2 \Longleftrightarrow x=t+2$

$\Rightarrow \frac{dt}{dx}=(x-2)'=1$

$\Longleftrightarrow dx=dt$

$P=\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{(t+2)^2-4(t+2)+5} = \int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t^2+1}$

$P=\left[\operatorname{Arctan} t\right]_{-2}^{-1}$

$P=\arctan(-1)-\arctan(-2)$

$P=\arctan 2-\frac{\pi}{4}$

Notes

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{(1+\sin t)^2}\,dt \quad \text{avec} \quad x = 1+\sin t$$

Bornes : $\begin{cases} t=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1+\sin 0 = 1 \\ x = 1+\sin\frac{\pi}{2} = 2 \end{cases}$

Relation dx et dt : $x = 1+\sin t$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = (1+\sin t)' = \cos t$$

$$\Rightarrow dx = \cos t \, dt$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$I = 1$$

$$K = \int_1^e \frac{\ln^3 t + \ln^2 t + 1}{t}\,dt \quad \text{avec} \quad x = \ln t$$

Bornes : $\begin{cases} t=1 \\ t=e \end{cases} \iff \begin{cases} x = \ln 1 = 0 \\ x = \ln e = 1 \end{cases}$

Relation dx et dt : $x = \ln t$

$$\frac{dx}{dt} = (\ln t)' = \frac{1}{t}$$

$$dx = \frac{dt}{t}$$

$$K = \int_0^1 (x^3 + x^2 + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x\right]_0^1$$

$$K = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{19}{12}$$

Notes

$$L = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} \quad \text{avec } x = \tan t$$

Bornes : $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Relation dx et dt : $x = \tan t$

$$\frac{dx}{dt} = (\tan t)' = 1 + \tan^2 t$$

$$dx = (1 + \tan^2 t)\, dt$$

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{(1+\tan^2 t)\, dt}{(\tan^2 t + 1)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\tan^2 t + 1}$$

$$\tan^2 t + 1 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

Donc $L = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \; dt$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi/2}{2} - 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

$$L = \frac{\pi + 2}{8}$$

Chap EDLCC : page 16 – ex.1 : 2) avec CI y(0)=0 et y'(0)=1

2) $y''+2.y'+5.y=\cos(2x)+2.\sin(2x)$ (E)

→ On résout $y''+2y'+5y=0$ (E_0)

On résout : $r^2+2r+5=0$ $\quad \Delta=-16<0$ donc $r_1=\dfrac{-2+4j}{2}=-1+2j$

Les solutions de (E_0) sont alors : $y_0(x)=e^{-x}\left(K_1\cos(2x)+K_2\sin(2x)\right)$; $K_1,K_2\in\mathbb{R}$.

→ On cherche y_p, une solution particulière de (E) :

On pose $5\times\ y_p=A\cos(2x)+B\sin(2x)$

$2\times\ y_p'=-2A\sin(2x)+2B\cos(2x)$

$1\times\ y_p''=-4A\cos(2x)+4B\sin(2x)$ et on remplace dans (E) :

$(5A+4B-4A)\cos(2x)+(5B-4A+4B)\sin(2x)=\cos(2x)+2\sin(2x)$

et on identifie : $\begin{cases} A+4B=1 \quad \times 4 \\ -4A+9B=2 \end{cases} \iff \begin{cases} 25B=6 \iff B=6/25 \\ A=1-4\times\dfrac{6}{25}=\dfrac{25-24}{25}=1/25 \end{cases}$

Notes

Donc $y_p(x) = \frac{1}{25}\left(\cos(2x) + 6\sin(2x)\right)$

Les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$

$$y(x) = e^{x}\left(k_1\cos(2x) + k_2\sin(2x)\right) + \frac{1}{25}\left(\cos(2x) + 6\sin(2x)\right) \; ; \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ Conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

$$y(0) = k_1 + \frac{1}{25} = 0 \iff k_1 = -\frac{1}{25}$$

$$y'(x) = e^{x}\left(k_1\cos(2x) + k_2\sin(2x)\right) + e^{x}\left(-2k_1\sin(2x) + 2k_2\cos(2x)\right) + \frac{1}{25}\left(-2\sin(2x) + 12\cos(2x)\right)$$

$$y'(0) = k_1 + 2k_2 + \frac{12}{25} = 1 \iff 2k_2 = 1 + \frac{1}{25} - \frac{12}{25} = \frac{14}{25}$$

$$\iff k_2 = \frac{7}{25}.$$

La solution est donc : $y(x) = \frac{1}{25}\left[e^{x}\left(7\sin(2x) - \cos(2x)\right) + \cos(2x) + 6\sin(2x)\right]$

Chap EDLCC : page 16 – ex.1 : 2) avec CI y(0)=0 et y'(0)=1

3) $\begin{cases} y'' - 4.y' + 3.y = -\frac{4}{5}.x.e^{-x} \quad (E) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

→ On résout $y'' - 4y' + 3y = 0 \quad (E_0)$

On résout $r^2 - 4r + 3 = 0$

$\Delta = 4$ donc $r_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ et $r_2 = \frac{4-2}{2} = 1$

Les solutions de (E_0) sont :

$y_0(x) = K_1 e^{3x} + K_2 e^{x}$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

→ On cherche y_p, une solution de (E)

On pose $3 \times \quad y_p = z.e^{-x}$

$-4 \times \quad y_p' = (z' - z)\, e^{-x}$

$1 \times \quad y_p'' = (\underbrace{z'' - z' - z' + z}_{z'' - 2z' + z})\, e^{-x}$

On remplace dans (E) :

$(3z - 4z' + 4z + z'' - 2z' + z)\, e^{-x} = -\frac{4}{5} x e^{-x}$

$\Leftrightarrow z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5} x$

On pose $8 \times \quad z = ax + b$

$-6 \times \quad z' = a$

$1 \times \quad z'' = 0$

On remplace : $-6a + 8ax + 8b = -\frac{4}{5} x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -4/5 \\ -6a + 8b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/10 \\ b = -\frac{3}{5} \times \frac{1}{8} = -\frac{3}{40} \end{cases}$

Notes Donc $y_p(x) = \frac{-1}{10}\left(x + \frac{3}{4}\right)$

Les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$.

$$y(x) = K_1 e^{3x} + K_2 e^{x} - \frac{1}{10}\left(x + \frac{3}{4}\right) ; K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

→ Conditions initials :

$$y(0) = K_1 + K_2 - \frac{3}{40} = 1 \quad (1)$$

$$y'(x) = 3K_1 e^{3x} + K_2 - \frac{1}{10}$$

$$y'(0) = 3K_1 + K_2 - \frac{1}{10} = 0 \quad (2)$$

On résout : $\begin{cases} K_1 + K_2 = \frac{43}{40} & (1) \\ 3K_1 + K_2 = \frac{1}{10} & (2) \end{cases}$

(2) − (1)

$\Leftrightarrow 2K_1 = -\frac{39}{40} \Leftrightarrow K_1 = -\frac{39}{80}$

(1) $\Leftrightarrow K_2 = \frac{43}{40} + \frac{39}{80} = \frac{86+39}{80} = \frac{125}{80} = \frac{25}{16}$

La solution est donc :

$$y(x) = -\frac{39}{80} e^{3x} + \frac{25}{16} e^{x} - \frac{1}{10}\left(x + \frac{3}{4}\right)$$