Nom : ………………………….. **Prénom :** ………………………………… **Groupe :** ………………

Calculatrice : Collège   Formulaires : en page 5 du sujet   Répondre sur le sujet

Exercice 1 : EDLCC du premier ordre (2 pts)

Déterminer les solutions de l'EDLCC suivante : $\begin{cases} RCu'(t) + u(t) = E & (E) \\ u(0) = 0 \end{cases}$ où R, C et E sont des constantes non nulles.

→ On résout $RCu' + u = 0$. Les solutions sont : $u_0(t) = K e^{-t/RC}$; $K \in \mathbb{R}$

→ On cherche u_p, une solution particulière de (E).

On pose $u_p = cte \Rightarrow u'_p = 0$. On remplace dans (E) :

$RC \times 0 + cte = E \Leftrightarrow cte = E$. Donc $u_p(t) = E$

→ Les solutions de E sont donc : $u = u_0 + u_p \Leftrightarrow u(t) = K e^{-t/RC} + E$, $K \in \mathbb{R}$

→ Conditions initiales : $u(0) = 0 \Leftrightarrow u(0) = K + E = 0 \Rightarrow K = -E$

La solution est donc : $u(t) = -E \cdot e^{-t/RC} + E$

$u(t) = E(1 - e^{-t/RC})$

Exercice 2 : Calcul d'intégrales (12 pts)

1) a) Déterminer une primitive directe de la fonction f, définie par : $f(x) = x^3 . e^{-x^4}$

On applique la formule $\int u' e^u dx = e^u + cte$ où $u = -x^4$.

alors $u' = -4x^3$ et $\int f(x) dx = -\frac{1}{4} \int -4x^3 e^{-x^4} dx = -\frac{1}{4} e^{-x^4} + cte$

Une primitive de f est donc $-\frac{1}{4} e^{-x^4}$.

1) b) Calculer l'intégrale $J = \int_{-1}^{1} x^3 . e^{-x^4} dx$ à l'aide de deux méthodes différentes :

Méthode 1 : $J = \left[-\frac{1}{4} e^{-x^4}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{4}\left(e^{-1} - e^{-1}\right) = 0$

Méthode 2 : Soit $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^4}$ alors $f(-x) = (-x)^3 \cdot e^{-(-x)^4} = -x^3 e^{-x^4}$

$f(-x) = -f(x)$ donc f est impaire.

Comme $[-1;1]$ est centré en 0, alors $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$

2) On souhaite calculer l'intégrale suivante : I = $\int_{-1}^{1}(2x^2+1)\cos(\pi x)\,dx$

a) Expliquer <u>en le justifiant</u>, pourquoi on peut écrire que I = 2. $\int_{0}^{1}(2x^2+1)\cos(\pi x)\,dx$

Les fonctions $x \longmapsto 2x^2+1$ et $x \longmapsto \cos(\pi x)$ sont paires, donc la fonction $x \longmapsto (2x^2+1)\cos(\pi x)$ est paire. $[-1;1]$ est centré en 0. Ainsi $I = 2 \times \int_0^1 (2x^2+1) \cdot \cos(\pi x)\,dx$

2) b) A l'aide d'une <u>double intégration par parties</u>, calculer la valeur exacte de I. (On simplifiera les calculs jusqu'au bout).

On sait que : $\int_a^b u\,v'\,dx = [u.v]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$.

On pose :

Ipp1 $\begin{cases} u = 2x^2+1 \\ v' = \cos(\pi x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 4x \\ v = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi} \end{cases}$

$I = \dfrac{2}{\pi} \underbrace{\left[(2x^2+1)\sin(\pi x)\right]_0^1}_{=0} - \dfrac{8}{\pi} \int_0^1 x \cdot \sin(\pi x)\,dx$

Ipp2 : $\begin{cases} u = x \\ v' = \sin(\pi x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -\dfrac{\cos(\pi x)}{\pi} \end{cases}$

$I = -\dfrac{8}{\pi} \left\{ -\dfrac{1}{\pi}\left[x \cdot \cos(\pi x)\right]_0^1 + \dfrac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi x)\,dx \right\}$

$I = -\frac{8}{\pi}\left(-\frac{1}{\pi}\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1}_{0}\right)$

Donc $I = -\frac{8}{\pi^2}$

3) A l'aide du changement de variable indiqué, calculer l'intégrale suivante :
$J = \int_{-1/5}^{2/5} \frac{dt}{25t^2-20t+13}$ changement de variable : $x = \frac{5t-2}{3}$. $\Longleftrightarrow t = \frac{3x+2}{5}$

Bornes : $\begin{cases} t = -\frac{1}{5} \Longleftrightarrow x = \frac{-1-2}{3} = -1 \\ t = \frac{2}{5} \Longleftrightarrow x = \frac{2-2}{3} = 0 \end{cases}$

Relation entre dx et dt : $x = \frac{5t-2}{3} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \left(\frac{5t-2}{3}\right)' = \frac{5}{3}$

$\Longleftrightarrow dx = \frac{5}{3}dt \Longleftrightarrow dt = \frac{3}{5}dx$

Ainsi :

$J = \int_{-1}^{0} \frac{\frac{3}{5}\,dx}{25\frac{(3x+2)^2}{25} - 20\frac{3x+2}{5} + 13} = \frac{3}{5}\int_{-1}^{0}\frac{dx}{9x^2+12x+4-12x-8+13} = \frac{3}{5}\int_{-1}^{0}\frac{dx}{9x^2+9}$

$J = \frac{1}{15}\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{15}\left[\arctan x\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{15}\left(\arctan 0 \underbrace{-\arctan(-1)}_{\frac{\pi}{24}}\right) = \frac{\pi}{60}$

4) A l'aide du changement de variable indiqué, calculer l'intégrale suivante :
$J = \int_{0}^{\ln(2)} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}$ changement de variable : $x = \sqrt{e^t-1}$. $\Longleftrightarrow e^t - 1 = x^2 \Longleftrightarrow e^t = x^2+1$

Bornes : $\begin{cases} t = 0 \\ t = \ln 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{e^0-1} = 0 \\ x = \sqrt{e^{\ln 2}-1} = \sqrt{2-1} = 1 \end{cases}$

Relation entre dx et dt : $x = \sqrt{e^t-1}$

$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \left(\sqrt{e^t-1}\right)' = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}}$

$\Longleftrightarrow dx = \frac{e^t\,dt}{2\sqrt{e^t-1}} \Longleftrightarrow dt = \frac{2x\,dx}{x^2+1}$

Donc :

$J = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{x(x^2+1)} = 2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1} = 2\left[\arctan x\right]_0^1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 2 **EDLCC du second ordre (6 pts)**

Résoudre, en rédigeant le mieux possible, l'équation différentielle linéaire à coefficients constants suivante :

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = 10t^2 - t \quad (E) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

→ On résout : $y'' - 6y' + 10y = 0 \; (E_0)$

On résout : $r^2 - 6r + 10 = 0$ $\quad \Delta = 36 - 40 = -4 < 0$

donc $r_1 = \frac{6+2j}{2} = 3 + j$

les solutions de (E) sont donc : $y_0(t) = e^{3t}(k_1 \cos t + k_2 \sin t)$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

→ On cherche y_p, une solution particulière de (E).

On pose $y_p = at^2 + bt + c \Rightarrow y'_p = 2at + b \Rightarrow y''_p = 2a$

On remplace dans (E) :

$2a - 6(2at + b) + 10(at^2 + bt + c) = 10t^2 - t$

$10at^2 + (-12a + 10b)t + 2a - 6b + 10c = 10t^2 - t$

On identifie :

$$\begin{cases} 10a = 10 \\ -12a + 10b = -1 \\ 2a - 6b + 10c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ 10b = 11 \iff b = \frac{11}{10} \\ 2 - \frac{33}{5} + 10c = 0 \iff 10c = \frac{23}{5} \iff c = \frac{23}{50} \end{cases}$$

~~Donc~~ $y_p(t) = t^2 + \frac{11}{10}t + \frac{23}{50}$

les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$

$y(t) = e^{3t}(k_1 \cos t + k_2 \sin t) + t^2 + \frac{11}{10}t + \frac{23}{50}$;

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

→ Conditions initiales :

$y(0) = 1 \iff k_1 + \frac{23}{50} = 1 \iff k_1 = \frac{27}{50}$

$y'(t) = 3e^{3t}(k_1 \cos t + k_2 \sin t) + e^{3t}(-k_1 \sin t + k_2 \cos t) + 2t + \frac{11}{10}$

$y'(0)=0 \iff 3K_1 + K_2 + \frac{11}{10} = 0 \iff K_2 = -\frac{11}{10} - \frac{3\times 27}{50} = \frac{-55-81}{50}$

$\iff K_2 = -\frac{136}{50} = -\frac{68}{25}$

La solution est donc:

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{50}\left(27\cos t - 136\sin t\right) + t^2 + \frac{11}{10}t + \frac{23}{50}$$

Formulaire

<u>Théorème/ Définition</u> : On appelle <u>équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre</u> toute équation de la forme : (E) $a.y''(t) + b.y'(t) + c.y(t) = f(t)$ (où $a \neq 0$, b et c sont des réels et f est une fonction continue sur I).

On note aussi : $a.\frac{d^2y}{dt^2} + b.\frac{dy}{dt} + c.y(t) = f(t)$ (E)

Résoudre l'équation (E), c'est rechercher toutes les fonctions y deux fois dérivables sur I et vérifiant (E).

Pour cela :

a) On résout l'équation sans second membre associée :

$$(E_0)\ \ a.y''(t) + b.y'(t) + c.y(t) = 0$$

On résout l'équation caractéristique : $a.r^2 + b.r + c = 0$

- si $\Delta > 0$, r_1 et r_2 sont les solutions réelles de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors $y_0(t) = K_1e^{r_1t} + K_2e^{r_2t}$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles

- si $\Delta = 0$, r_1 est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors $y_0(t) = e^{r_1t}(K_1 + K_2t)$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles.

- si $\Delta < 0$, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1}$ sont les solutions complexes de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors

$y_0(t) = e^{\alpha t}(K_1\cos(\beta t) + K_2\sin(\beta t))$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles.

b) On recherche une solution particulière de (E), que l'on note y_p.

c) Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme : $y_G(t) = y_0(t) + y_p(t)$, appelées solutions générales de (E).

………..

………...

…...

………...