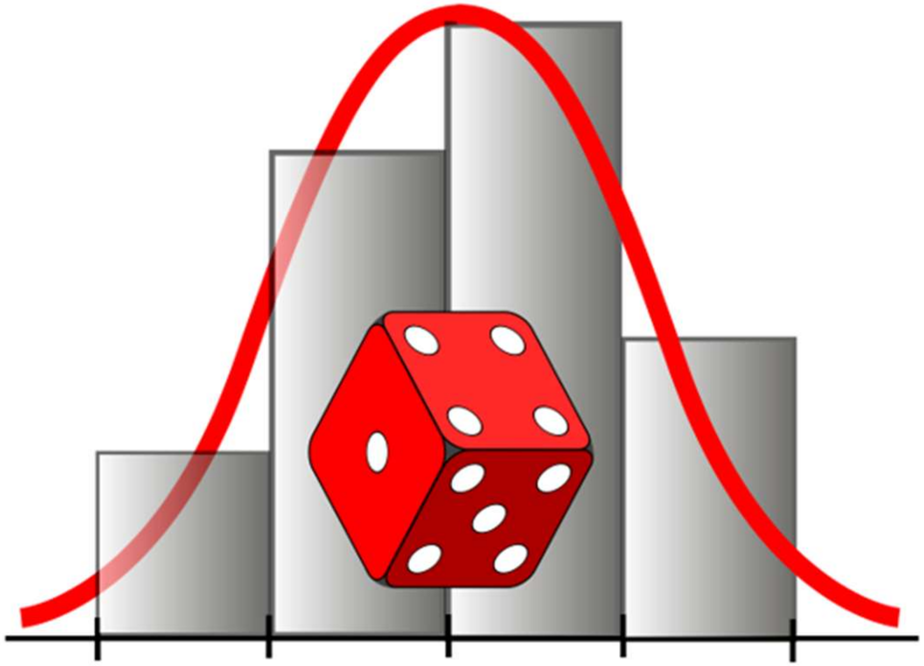
Probabilité
Correction du TP1

Chapitre 1 : Variables aléatoires discrètes et continues



<u>Exercice 1</u> Circuit électrique

1. Soient A, B, C trois événements. Montrer que :

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C).$$

2. On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i, et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit

   2.1. si les composants sont disposés en série.

   2.2. si les composants sont disposés en parallèle.

   2.3. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

① $P(A\cup B\cup C) = P(A\cup(B\cup C)) = P(A) + \underbrace{P(B\cup C)} - P(A\cap(B\cup C))$

$= P(A) + \underbrace{P(B) + P(C) - P(B\cap C)} - \underbrace{P((A\cap B)\cup(B\cap C))}$

$= \quad " \quad " \quad " \quad - \underbrace{\left(P(A\cap B) + P(A\cap C) - P(A\cap B\cap C)\right)}$

$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(B\cap C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

② Soit F_i l'évènement "C_i fonctionne" pour $1\le i\le 3$. $P(F_i) = p_i$ ← décryptage de l'énoncé

(2.1) Le circuit en série fonctionne ssi les 3 composants fonctionnent en m̂ tps : $p(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = p(F_1) \times p(F_2) \times p(F_3)$ (indépendance de 3 composants)

$= p_1 . p_2 . p_3$ est donc la probabilité pour que le circuit en série fonctionne.

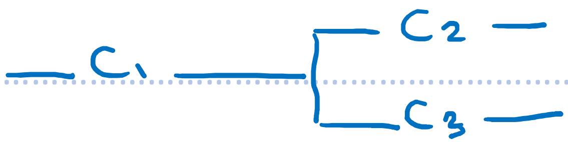
2.2 le circuit en parallèle fonctionne ssi au moins un des composants fonctionne :

$$p(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = p(F_1) + p(F_2) + p(F_3) - p(F_1 \cap F_2) - p(F_1 \cap F_3) - p(F_2 \cap F_3) + p(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$$

$$p(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = p_1 + p_2 + p_3 - p_1 p_2 - p_1 p_3 - p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3$$

(indépendance des composants)

2.3



on calcule donc : $p(F_1 \cap (F_2 \cup F_3))$

$$= p((F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_3))$$

$$= p(F_1 \cap F_2) + p(F_1 \cap F_3) - p(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$$

$$p(F_1 \cap (F_2 \cup F_3)) = p_1 p_2 + p_1 p_3 - p_1 p_2 p_3 = p_1 (p_2 + p_3 - p_2 p_3)$$

Exercice 2

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer

1. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1;
2. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse;
3. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Décryptage de l'énoncé

Soit les évènements : A_i " la pièce provient de l'atelier i " $1 \leq i \leq 2$

alors $P(A_1) = 2 \times P(A_2)$

D " la pièce est défectueuse "

$P(D/A_1) = \frac{3}{100} = 0{,}03$

$P(D/A_2) = \frac{4}{100} = 0{,}04$

① $\begin{cases} P(A_1) = 2P(A_2) \\ P(A_1) + P(A_2) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P(A_1) = 2/3. \\ 3P(A_2) = 1 \Longleftrightarrow P(A_2) = 1/3 \end{cases}$

② $\boxed{P(A_1 \cap D) = P(D/A_1) \cdot P(A_1)} = 0{,}03 \times 2/3 = 0{,}02$

③ $P(A_1/D) = \dfrac{P(A_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A_1 \cap D)}{P(D/A_1).P(A_1) + P(D/A_2).P(A_2)}$ ← Formule [Probabilité totale

Formule de Bayes. hyp : $\Omega = A_1 \sqcup A_2$ univers : ensble des pièces fabriqués

$\{A_1, A_2\}$ forme une partition de Ω

$$P(A_1/D) = \frac{0{,}02}{0{,}03 \times \frac{2}{3} + 0{,}04 \times \frac{1}{3}} = \frac{0{,}02}{\frac{0{,}06 + 0{,}04}{3}} = \frac{0{,}06}{0{,}1} = 0{,}6$$

Autre rédaction : On démontre aussi que $p(D \cap A_2) = p(D/A_2).P(A_2) = \dfrac{0{,}04}{3}$

Comme : $\boxed{P(A_1/D) = \dfrac{P(A_1 \cap D)}{P(D)}}$

et comme $D = (D \cap A_1) \sqcup (D \cap A_2)$

Alors $P(D) = 0{,}02 + \dfrac{0{,}04}{3} = \dfrac{0{,}1}{3}$

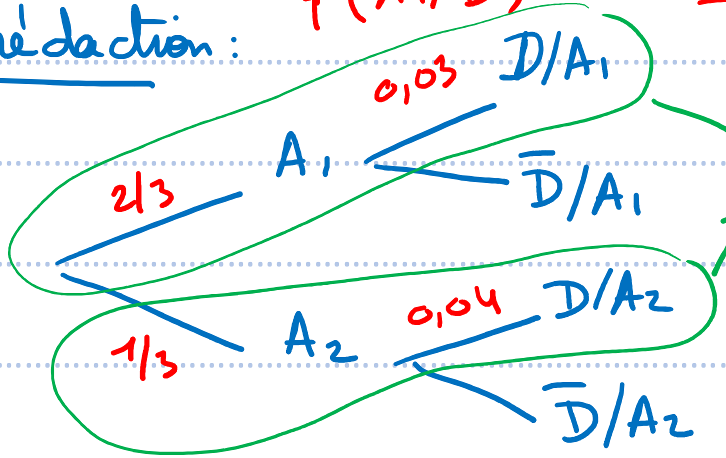
et $p(A_1/D) = \dfrac{0{,}02}{\frac{0{,}1}{3}} = \dfrac{0{,}06}{0{,}1} = 0{,}6$

Autre rédaction :

$$P(A_1/D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(D)}$$

$P(A_1 \cap D) \longrightarrow$ question ②

$P(D) \longrightarrow$?



$$P(D) = \frac{2}{3} \times 0{,}03 + \frac{1}{3} \times 0{,}04 = \frac{0{,}1}{3}$$

Donc $P(A_1/D) = \dfrac{0{,}02}{\frac{0{,}1}{3}} = 0{,}6.$

Exercice 3

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
- 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : "la boite est abîmée" et par D l'événement "la boite achetée contient au moins une clé défectueuse".

1. Donner les probabilités de $P(A)$, $P(\bar{A})$, $P(D|A)$, $P(D|\bar{A})$, $P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D.
2. Le client constate qu'une des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée?

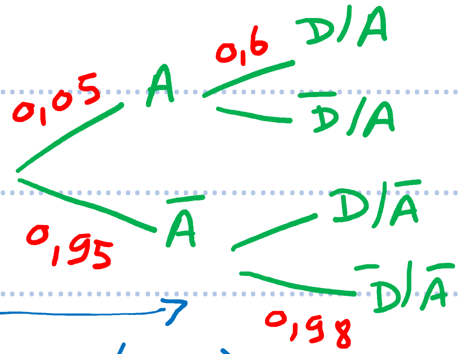
Décryptage de l'énoncé

Ω = ensemble des clés USB.

A = "la boite est abîmée" $p(A) = \frac{5}{100} = 0,05$

D = "la boite contient au moins une clé défectueuse"

$P(D/A) = \frac{60}{100} = 0,6$ $\quad P(\bar{D}/\bar{A}) = \frac{98}{100} = 0,98$



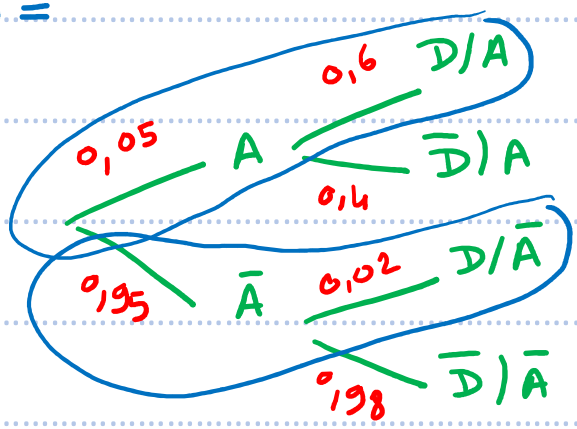
① $p(A) = 0,05 \iff p(\bar{A}) = 1 - 0,05 = 0,95$

$P(D/A) = 0,6$; $P(D/\bar{A}) = 1 - p(\bar{D}/\bar{A})$

$p(D/\bar{A}) = 0,02$; $p(\bar{D}/A) = 1 - p(D/A) = 0,4$; $p(\bar{D}/\bar{A}) = 0,98$

Formule de probabilité totale

$P(D) =$



$$P(D) = P(A).P(D/A) + P(\bar{A}).P(D/\bar{A})$$

$$= 0,05 \times 0,6 + 0,95 \times 0,02$$

$$P(D) = 0,049.$$

Bayes :

② $$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A).P(A)}{P(D)}$$

$$\left(\underline{\text{Rmque}}\ P(A|D) = \frac{P(D/A).P(A)}{P(D/A).P(A) + P(\bar{A}).P(D/\bar{A})} \right)$$

$$= \frac{0,6 \times 0,05}{0,049}$$

$$P(A|D) = \frac{30}{49}$$

Exercice 4

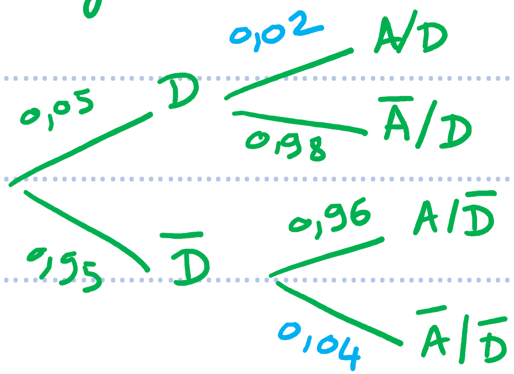
Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise?

Décryptage de l'énoncé :



Soit D : " la pièce est défectueuse" $P(D) = 0,05$

A : " la pièce est acceptée"

$P(A/\bar{D}) = 0,96$; $P(\bar{A}/D) = 0,98$.

1. Soit E = " il y a une erreur de contrôle"

$E = (A \cap D) \sqcup (\bar{A} \cap \bar{D})$

$p(E) = p(A \cap D) + (\bar{A} \cap \bar{D}) = p(A/D) \cdot p(D) + p(\bar{A}/\bar{D}) \cdot p(\bar{D})$

$= 0,02 \times 0,05 + 0,04 \times 0,95 = 0,039$

② $P(D/A) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(D \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/D) \cdot P(D)}{P(A|D) \cdot P(D) + P(A|\bar{D}) \cdot P(\bar{D})}$

$= \dfrac{0{,}02 \times 0{,}05}{0{,}02 \times 0{,}05 + 0{,}96 \times 0{,}95} = \dfrac{0{,}001}{0{,}913} = \dfrac{1}{913} \simeq 0{,}001.$

Exercice 5

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour la classe R_2, et 30% pour la classe R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

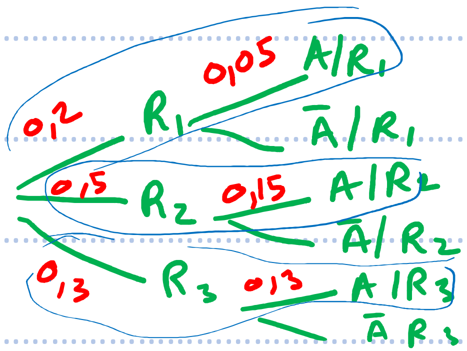
1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année?
2. Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque?

Décryptage de l'énoncé : R_i : " client de la classe R_i " $1 \leq i \leq 3$

$p(R_1) = \frac{20}{100} = 0,2$ $p(R_2) = \frac{50}{100} = 0,5$; $p(R_3) = \frac{30}{100} = 0,3$

A : " le client a un accident "

$p(A/R_1) = 0,05$ $p(A/R_2) = 0,15$ $p(A/R_3) = 0,30$.



① $p(A)$? Formule de probabilités totales

$p(A) = p(R_1).p(A/R_1) + p(R_2).p(A/R_2) + p(R_3).p(A/R_3)$

$p(A) = 0,2 \times 0,05 + 0,5 \times 0,15 + 0,3 \times 0,3 = 0,175$.

2 $$p(R_1/\bar{A}) = \frac{p(R_1 \cap \bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{p(\bar{A}/R_1) \cdot p(R_1)}{1-p(A)} = \frac{(1-p(A/R_1)) \cdot p(R_1)}{1-p(A)}$$

$$p(R_1/\bar{A}) = \frac{(1-0{,}05) \cdot 0{,}2}{1-0{,}175} = \frac{0{,}95 \times 0{,}2}{0{,}825} \simeq 0{,}23$$

Exercice 6

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne? un peuplier? un hêtre?

Décryptage de l'énoncé :

C : "l'arbre est un chêne" $\quad P(C) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

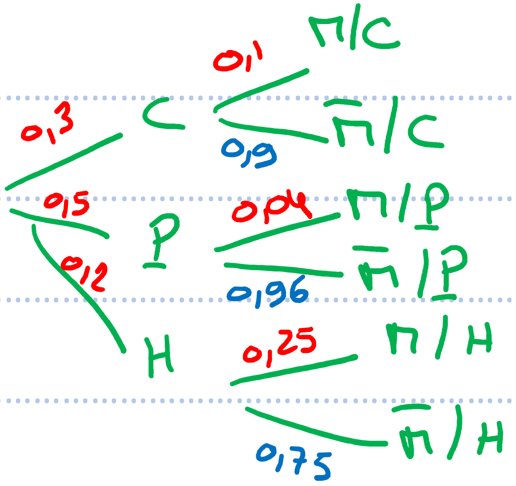
P : " " peuplier" $\quad P(P) = \frac{50}{100} = 0{,}5$

H : " " hêtre" $\quad P(H) = \frac{25}{100} = 0{,}25$

M = "l'arbre est malade" $\quad P(M/C) = \frac{10}{100} = 0{,}1$

$P(M/P) = \frac{4}{100} = 0{,}04$

$P(M/H) = \frac{25}{100} = 0{,}25.$



$$P(C/M) = \frac{P(C\cap M)}{P(M)} \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(M/C)\cdot P(C)}{P(C)\cdot P(M/C) + P(P)\cdot P(M/P) + P(H)\cdot P(M/H)}$$

$$P(C/M) = \frac{0{,}1 \times 0{,}3}{0{,}1\times 0{,}3 + 0{,}04 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}25} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(P/M) &= 0{,}5 \\ P(H/M) &= 0{,}2 \end{aligned}}$$