BACHELOR UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

Ressource R1-04 : OUTILS MATHEMATIQUES ET LOGICIELS

Devoir sur table N°2

Durée : 1h30min. **Calculatrice : Collège** **Documents : aucun**

Instructions : Répondre sur le sujet - Le barème est approximatif

Nom : …………………………………………………………

Prénom : ………………………………………………………..

Groupe : ……………………

BROUILLON

Exercice 1 **Limites (4.5 pts)** Soit $f(x) = \frac{4x^3-2x^2-5x+3}{x^2-1}$

a) Déterminer un équivalent de f(x) en +∞ , puis en déduire sa limite en +∞ :

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4x^3}{x^2} = 4x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 4x = +\infty$.

b) Déterminer un équivalent de f(x) en -∞ , puis en déduire sa limite en -∞ :

De même $f(x) \underset{-\infty}{\sim} 4x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) a) Rappeler la formule d'un équivalent en a d'une fonction g, dérivable en a :

$g(x) \underset{a}{\sim} g(a) + (x-a)\,g'(a)$

b) En déduire un équivalent de f(x) en 1, puis sa limite en 1 :

$g(x) \underset{1}{\sim} g(1) + (x-1)g'(1)$ donc $\overbrace{4x^3-2x^2-5x+3}^{g(x)} \underset{1}{\sim} 3(x-1)$

car $g(1)=0$ et $g'(x) = 12x^2-4x-5 \Rightarrow g'(1) = 3$

Alors $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{3(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{x+1}$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$

c) Retrouver ce résultat à l'aide de la règle de l'Hospital

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$ alors $L = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(4x^3-2x^2-5x+3)'}{(x^2-1)'}$

$L = \lim\limits_{x\to 1} \frac{12x^2-4x-5}{2x} = \frac{3}{2}$.

Exercice 2 : Calcul Intégral – Simplifier les expressions – pas de valeurs approchées. (7.5 pts)

1) Déterminer et simplifier si possible les primitives suivantes :

$\forall x \neq 0 \;\; I(x) = \int \frac{5x^4-2x+3}{x^2}dx = \int \frac{5x^4}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\,dx$

$I(x) = 5\int x^2dx - 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x^2} = 5\frac{x^3}{3} - 2\ln|x| - \frac{3}{x} + cte$

BROUILLON

$K(t) = \int \frac{t}{\sqrt{3t^2+2}} dt =$ ……

$\int \frac{u'}{2\sqrt{u}} dt = \sqrt{u} + cte$ Ici on pose $u = 3t^2+2 \Rightarrow u' = 6t$ donc :

$K(t) = \frac{1}{3} \int \frac{6t}{2\sqrt{3t^2+2}} dt = \frac{1}{3}\sqrt{3t^2+2} + cte$

$J(t) = \int \frac{2+t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{1+t^2}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2} dt = \int 1\, dt + \int \frac{dt}{1+t^2}$

$J(t) = t + \arctan(t) + cte$

$L = -\int_{-1}^{1} \frac{5}{1+t^2} dt$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$L = \int_1^{-1} \frac{5}{1+t^2} dt$ …… $f(t) = \frac{5}{1+t^2}$ est paire sur $[-1;1]$ car $f(-t) = f(t)$

donc $L = -2 \times \int_0^1 \frac{5}{1+t^2} dt = -10 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = -10 \left[\arctan t\right]_0^1$

$L = -10(\arctan 1 - \arctan 0) = -\frac{10\pi}{4} = -\frac{5\pi}{2}$

$M = \int_0^{2\pi/5} \sin(5x).\cos(5x)dx$ …… $f(x) = \sin(5x)\cos(5x)$ est $\frac{2\pi}{5}$-périodique, donc $M = \int_{-\pi/5}^{\pi/5} \sin(5x)\cos(5x)\,dx$ car $long\left(\left[0;\frac{2\pi}{5}\right]\right) = \frac{2\pi}{5}$

Ainsi comme f est de plus impaire, alors $M = 0$.

$N = \int_0^1 t.\sqrt{e^{-t^2}} dt$ …… $= \int_0^1 t\, e^{-t^2/2} dt$

$\int u' e^u dt = e^u + cte$ $\quad u = -\frac{t^2}{2} \Rightarrow u' = -t$

$N = -\int_0^1 -t e^{-t^2/2} dt = -\left[e^{-t^2/2}\right]_0^1 = 1 - e^{-1/2}$

BROUILLON

<u>Exercice 2</u> Fonctions (8 pts)

Soit X, la fonction définie par : $g(t) = \frac{t^2}{t^2-\omega^2}$ où ω est une constante strictement positive.

1) Déterminer l'ensemble de définition de g :

$g(t)$ existe ssi $t^2 - \omega^2 \neq 0$. On résout alors $(t-\omega)(t+\omega) = 0$

$\iff t = \omega$ ou $t = -\omega$

Donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{-\omega ; \omega\} =]-\infty ; -\omega[\cup]-\omega ; \omega[\cup]\omega ; +\infty[$

2) Etudier en le justifiant la parité de la fonction g.

$g(-t) = \frac{(-t)^2}{(t^2) - \omega^2} = \frac{t^2}{t^2 - \omega^2} = g(t) \quad \forall\, t \neq -\omega ; \omega.$

g est donc paire

3) Déterminer la fonction dérivée de g :

$g(t) = \frac{t^2}{t^2-\omega^2} \Rightarrow g'(t) = \frac{2t(t^2-\omega^2) - t^2(2t)}{(t^2-\omega^2)^2} = \frac{-2t\omega^2}{(t^2-\omega^2)^2}$

$\forall\, t \neq -\omega ; \omega.$

4) Construire le tableau de variations de g sur l'ensemble des valeurs positives de son ensemble de définition, en justifiant le signe de la dérivée, et la détermination des limites.

t	0		ω		$+\infty$
$g'(t)$	0	$-$	||	$-$	
g		↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	1

$\lim_{t \to 0} g(t) = g(0) = 0$

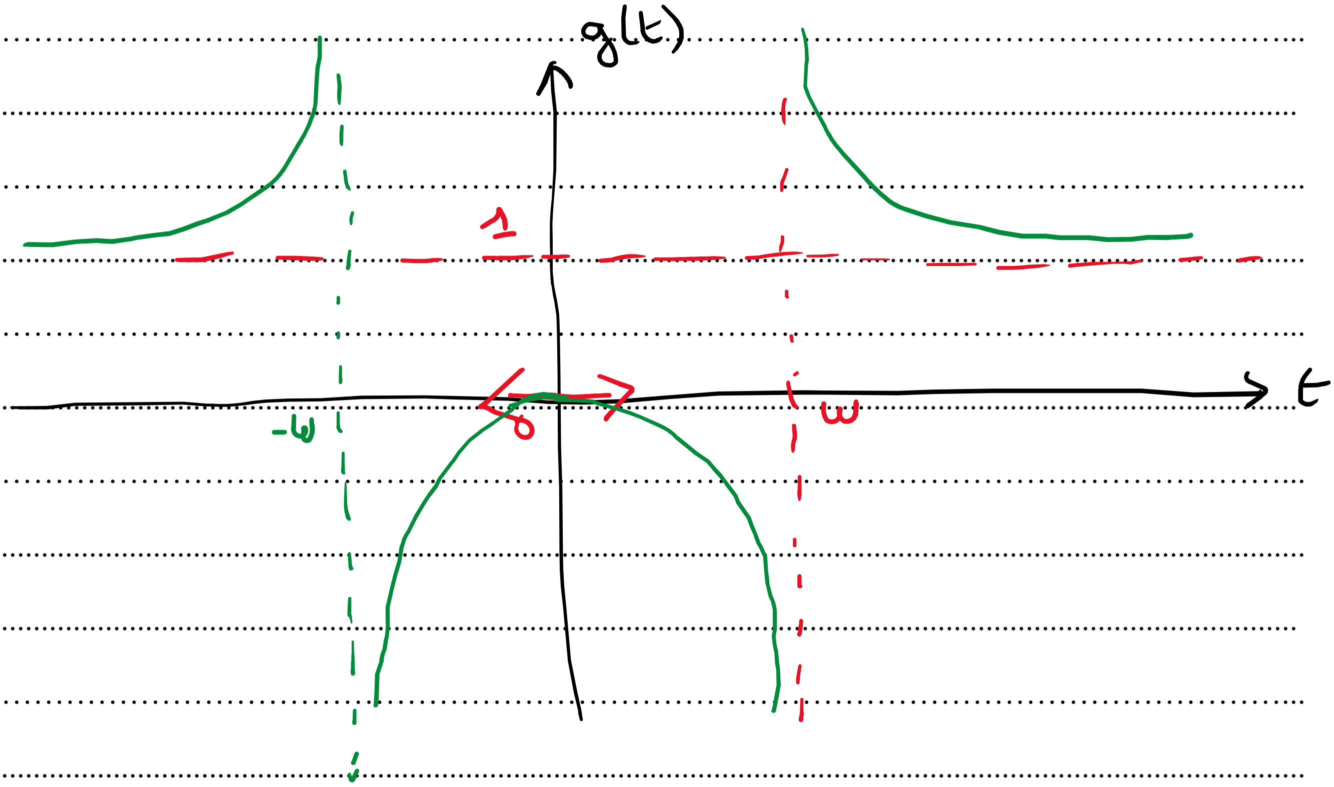
$\lim_{t \to \omega^-} g(t) = \frac{\omega^2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{t \to \omega^+} g(t) = \frac{\omega^2}{0^+} = +\infty$

$\lim_{t \to +\infty} g(t) = 1$ car $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^2} = 1$

BROUILLON

5) Tracer l'allure de la courbe représentant g sur son ensemble de définition.



6) Montrer que g est bijective sur l'intervalle $]\omega, +\infty[$ puis déterminer l'expression de sa fonction réciproque avec ses ensembles de définition et image.

g est bijective sur $]\omega ; +\infty[$ car g est continue et strictement monotone sur $]\omega ; +\infty[$ (th de bijection). $g :]\omega ; +\infty[\longrightarrow]1 ; +\infty[$, $t \longmapsto g(t) = \frac{t^2}{t^2-\omega^2}$ admet donc une fonction réciproque :

$$g^{-1} :]1 ; +\infty[\longrightarrow]\omega ; +\infty[$$
$$y \longmapsto t = g^{-1}(y)$$

Comme $y = \frac{t^2}{t^2-\omega^2}$; $t > \omega$ et $y > 1$

$y(t^2-\omega^2) = t^2 \iff y t^2 - t^2 = y\omega^2 \iff t^2(y-1) = y\omega^2$
$\iff t^2 = \frac{y\omega^2}{y-1} \iff t = \pm\sqrt{\frac{y\omega^2}{y-1}}$. Comme $t > \omega > 0$,
alors $t = \sqrt{\frac{y\omega^2}{y-1}} = g^{-1}(y)$.

BROUILLON

Exercice hors barème de type « poursuites d'études » : Faire l'étude complète de la fonction cosinus hyperbolique, définie par : $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………