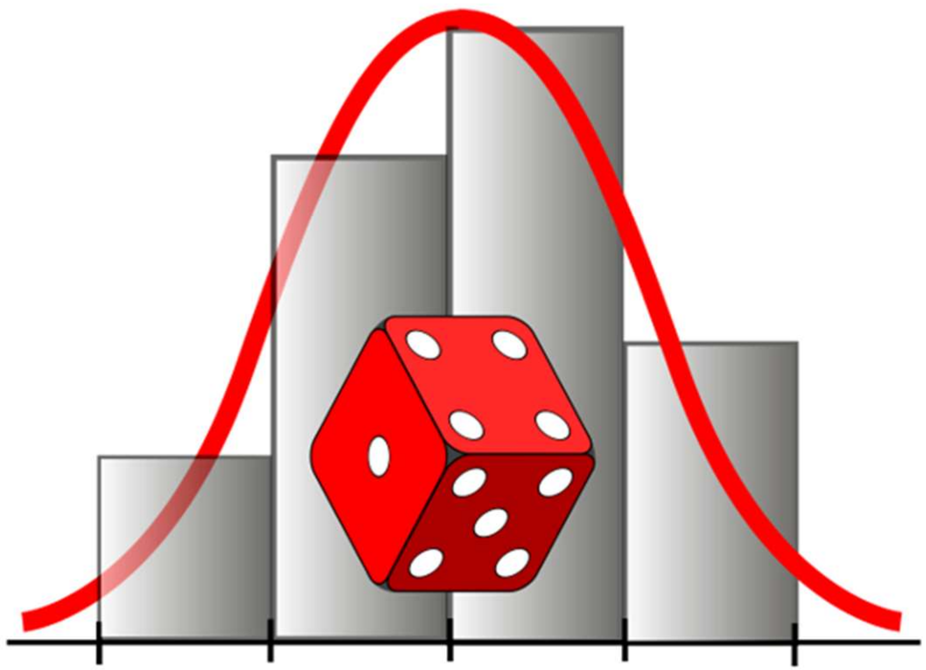
Probabilité 2
Exercices sur les bases

Chapitre 1 : Variables aléatoires discrètes et continues



Exercice 1 Un sac contient des jetons verts, rouges et jaunes en grande quantité. On prend trois jetons au hasard et on s'intéresse aux événements suivants :

A : “les trois jetons sont de même couleur”

B : “l'un des jetons est vert”

C : “il y a deux jetons rouges parmi les trois jetons tirés”

D : “les jetons sont de trois couleurs différentes.”

1. Déterminer les événements suivants : $A \cap B$, $B \cap C$, $\overline{B} \cap A$ et $A \cup D$.
2. Les événements A et D sont-ils contraires ? Sont-ils incompatibles ?

Exercice 2 Dans une fabrique de processeurs, on prélève toutes les heures les trois derniers processeurs produits. Ceux-ci sont classés dans deux catégories : fonctionnel (codé) 1 et défectueux (codé 0).

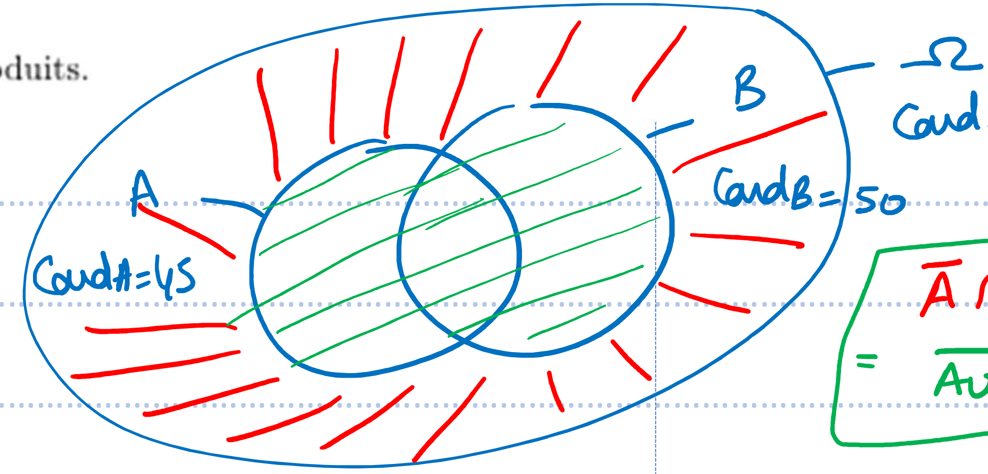
1. Décrivez l'espace associé à cette expérience aléatoire (par quoi peut-on représenter les états des trois processeurs p_1, p_2 et p_3 sélectionnés).
2. Décrivez (en termes ensemblistes) les évènements suivants :
   — $A =$"le premier processeur est défectueux"
   — $B =$"le dernier est fonctionnel"
   — $C =$"deux processeurs sont défectueux"
   — $D =$"au moins deux processeurs sont fonctionnels".

Exercice 3 Soit une probabilité $\mathbf{P}$ sur un univers Ω et deux évenements A et B.

1. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,03$, $\mathbf{P}(B) = 0,07$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 0,1$. Calculer $\mathbf{P}(A \cap B)$.
2. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,8$ et $\mathbf{P}(B) = 0,3$. Les événements A et B sont-ils être disjoints ?
3. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,3$ et $\mathbf{P}(B) = 0.6$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 0,8$. Calculer $\mathbf{P}(A \cap \overline{B})$
4. On suppose que $\mathbf{P}(A) = 0,35$, $\mathbf{P}(B) = 0,75$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 0,84$. Calculer $\mathbf{P}(A \cup \overline{B})$.

Exercice 4 100 personnes sont interrogées sur l'utilisation de deux produits A et B. 45 utilisent A, 50 utilisent B et 20 n'utilisent ni A ni B. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle utilise :

1. Au moins l'un des deux produits.
2. A et B.
3. seulement A.
4. Un seul des deux produits.



$\text{Card}\,\Omega = 100$

$\overline{A} \cap \overline{B}$ = ni A ni B

$= \overline{A \cup B}$

Quelques propriétés sur les opérations sur les ensembles qui doivent facilement être retrouvées :

$$
\begin{array}{r|l}
A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup \emptyset = A \\
A \cap \Omega = A & A \cup \Omega = \Omega \\
A \cap A = A & A \cup A = A \\
A \cap B = B \cap A & A \cup B = B \cup A \\
\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\
A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cap \overline{A} = \emptyset & A \cup \overline{A} = \Omega \\
\text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cap B = B & \text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cup B = A
\end{array}
$$

Exercice 5 Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 produisent des pièces de même type. La machine M_1 fournit les $\frac{4}{5}$ de la production, et la machine M_2 le reste. Parmi ces pièces, certaines sont défectueuses : c'est le cas pour 5% des pièces produites par M_1 et 4% des pièces produites par M_2.

1. Compléter le tableau suivant qui décrit la production journalière de 100 pièces :

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses			
Nombre de pièces non défectueuses			
Total			

2. Un jour donné, on tire au hasard une pièce parmi la production des deux machines. On considère les événements suivants :
   A : "la pièce choisie est produite par M_1"
   B : "la pièce choisie est produite par M_2"
   C : "la pièce choisie est défectueuse"
   Déterminer les probabilités suivantes : $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(\overline{C})$, $\mathbf{P}(A \cap C)$ et $\mathbf{P}(A \cup C)$.

Exercice 6 Dans une population, les groupes sanguins sont répartis en quatre groupes : A, B, AB et O ; d'autres part, ils sont répartis suivant le rhésus (+ ou −). Nous avons consigné ces répartitions en % dans le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rhésus +	32.8	8.1	4.15	36
Rhésus −	7.2	1.9	0.85	9

Un individu est pris au hasard dans cette population. Quelle est la probabilité :

1. qu'il soit du groupe A ?
2. qu'il ait un rhésus + ?
3. qu'il soit du groupe A ou qu'il ait un rhésus + ?

Exercice 7 Un dé dont les six faces portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6 est truqué de sorte que la probabilité qu'une face apparaisse est donnée par le tableau suivant. On lance ce dé une fois. Voici la distribution de probabilité :

Numéro de la face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,1	0,25	0,3	0,05	?

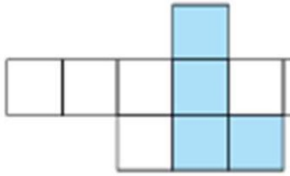
Calculer la probabilité des événements suivants :

A : “Le numéro qui apparait est le 6” ;
B : “Le numéro qui apparait est pair” ;
C : “Le numéro qui apparait est différent de 3”.

Exercice 8 Soit $\Omega = \{1, \dots, 9\}$.

1. Déterminer la loi $\mathbf{P}$ de probabilité sur Ω telle que la probabilité de l'événement élémentaire $\{i\}$ soit proportionnelle à i pour tout $i \in \Omega$.
2. Calculer la probabilité des événements "pair" et "premier".

Exercice 9 Trois personnes, Anne, Bernard et Clotilde choisissent une case au hasard dans la figure suivante :



On s'intéresse à l'événement V : "la case choisie est colorée". Anne affirme "$\mathbf{P}(V) = \frac{1}{3}$", Bernard répond "mais non, $\mathbf{P}(V) < \frac{1}{4}$", enfin Clotilde prétend : "$\mathbf{P}(V) > \frac{1}{2}$". Envisager les trois protocoles suivants du choix de case :

- *Protocole A :* choix d'une case parmi douze ;
- *Protocole B :* choix d'une colonne au hasard, puis d'une case au hasard dans cette colonne ;
- *Protocole C :* choix d'une ligne au hasard, puis d'une case au hasard dans cette ligne.

Dans chaque cas, calculer $\mathbf{P}(V)$. Quelle est la morale de cette histoire ?