Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 - mx + 4 = 0$ **où m est un paramètre réel.**

m	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
m^2-16		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Delta = m^2 - 4(1)(4) = m^2 - 16$

1° Cas $m^2 - 16 > 0 \iff m \in]-\infty ; -4[\cup]4 ; +\infty[$

L'équation a deux solutions $x_1 = \dfrac{m - \sqrt{m^2-16}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{m + \sqrt{m^2-16}}{2}$

2° Cas $m^2 - 16 = 0 \iff m = \pm 4$

L'équation a une solution $x_1 = x_2 = \dfrac{m}{2}$

3° Cas $m^2 - 16 < 0 \iff m \in]-4 ; 4[$

L'équation à deux solutions complexes conjugués :

$z_1 = \dfrac{m + i\sqrt{16-m^2}}{2}$

$z_2 = \dfrac{m - i\sqrt{16-m^2}}{2}$

2) $3tan^2x + 2\sqrt{3}tanx - 3 = 0$

On pose $X = \tan x$ avec $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ et on résout :

$3X^2 + 2\sqrt{3}X - 3 = 0$ $\quad \Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(3)(-3) = 12 + 36 = 48 > 0$

$X_1 = \dfrac{-2\sqrt{3} + \sqrt{48}}{6} = \dfrac{-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $X_2 = -\sqrt{3}$

On résout alors :

$\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \iff x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ $\qquad \tan x = -\sqrt{3} \iff x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi ; \dfrac{2\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

3) $2sin^2x - 3sinxcosx + cos^2x = 0$

On divise l'équation par $\cos^2 x$ si $\cos^2 x \neq 0$

1° Cas Si $\cos^2 x \neq 0 \iff x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$. L'équation devient :

$2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$ On pose $X = \tan x$ et on résout :

$2X^2 - 3X + 1 = 0$ $\quad \Delta = 9 - 4(2)(1) = 1 > 0$ $\quad X_1 = \dfrac{3+1}{4} = 1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$

On résout alors $\tan x = 1 \iff x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ et $\tan x = \dfrac{1}{2} \iff x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi$

2° Cas Si $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ alors $\cos x = 0$ et l'équation devient :

$2\sin^2 x = 0$ ce qui est impossible puisque $\sin(\pi/2 + k\pi) \neq 0$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi ; \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $e^{2x} - 2e^x - m \geq 0$ où m est un paramètre réel.

On pose $X = e^x$ et on résout : $X^2 - 2X - m \geq 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-m) = 4 + 4m$

1° Cas $4 + 4m > 0 \iff m > -1$. Alors $X_1 = \frac{2 + \sqrt{4+4m}}{2} = 1 + \sqrt{1+m}$

et $X_2 = 1 - \sqrt{1+m}$

$X^2 - 2X - m \geq 0 \iff X \in \left]-\infty ; 1 - \sqrt{1+m}\right] \cup \left[1 + \sqrt{1+m} ; +\infty\right[$

Comme $X = e^x > 0$, cherchons le signe de $1 - \sqrt{1+m}$

On sait que $m > -1$

1) Si $m \geq 0$, alors $1 - \sqrt{1+m} \leq 0$ et $e^x \in \left[1 + \sqrt{1+m} ; +\infty\right[$

$x \in \left[\ln(1 + \sqrt{1+m}) ; +\infty\right[$

2) Si $m < 0$, alors $1 - \sqrt{1+m} > 0$ et $e^x \in \left]0 ; 1 - \sqrt{1+m}\right] \cup \left[1 + \sqrt{1+m} ; +\infty\right[$.

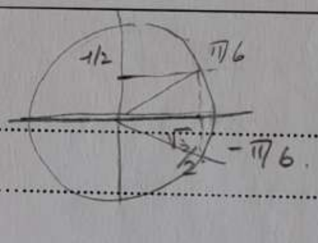
$x \in \left]-\infty ; \ln(1 - \sqrt{1+m})\right] \cup \left[\ln(1 + \sqrt{1+m}) ; +\infty\right[$

2e Cas $m = -1$ $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 \geq 0 \quad \forall X$

$X = e^x$ donc $x \in \mathbb{R}$

3e Cas $m < -1$, $\Delta < 0$ il n'y a pas de solution.

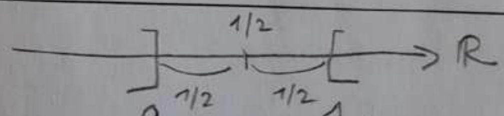
2) $2\cos x - \sqrt{3} < 0$



$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \iff -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

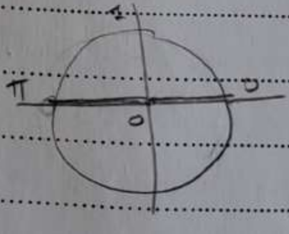
$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[$

3) $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ $\iff d(\sin x ; 1/2) < 1/2$



$\iff 0 < \sin x < 1$

$\iff 0 < x < \pi$



$\iff 2k\pi < x < (2k+1)\pi$

$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\pi ; (2k+1)\pi\right[$