

TP1 Tableaux blancs du semestre 5
Programme : Probabilités conditionnelles

1) Rappels sur les bases des probabilités

Quelle sont les formules à retenir pour le calcul des probabilités ?

Soient un univers Ω et P une probabilité sur Ω . On a les formules suivantes :

Parties de Ω	Vocabulaire des évènements	Propriétés sur les probabilités
A	A quelconque	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\emptyset, \Omega$	évènement <i>impossible, certain</i>	$P(\emptyset) = 0 \quad P(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B <i>incompatibles</i>	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\bar{A}$	$\bar{A}$ est l'évènement <i>contraire</i> de A	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
A, B	A et B quelconques	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$	Univers fini	$\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$
$\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$	Univers discret	$\sum_{i \in \mathbb{N}} P(\omega_i) = 1$

Quelques propriétés sur les opérations sur les ensembles qui doivent facilement être retrouvées :

$$\begin{array}{l|l}
 A \cap \emptyset = \emptyset & A \cup \emptyset = A \\
 A \cap \Omega = A & A \cup \Omega = \Omega \\
 A \cap A = A & A \cup A = A \\
 A \cap B = B \cap A & A \cup B = B \cup A \\
 \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} & \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\
 A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
 A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
 A \cap \bar{A} = \emptyset & A \cup \bar{A} = \Omega \\
 \text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cap B = B & \text{Si } B \subset A \text{ alors } A \cup B = A
 \end{array}$$

2) Rappels sur les probabilités conditionnelles

Définition : Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. On définit la probabilité de A sachant B , notée $P(A/B)$, par : $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Remarque : Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. Comme la probabilité de A sachant B , est :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ on peut aussi écrire que : } P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Définition : A et B sont deux évènements indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Définition : On dit que les évènements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω lorsqu'ils sont disjoints deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j$ et $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$

Formule de probabilités totales : Soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ une partition de l'univers Ω et B un évènement.

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

Formule de Bayes :

Soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ une partition de l'univers Ω et B un évènement.

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$$

$$\text{Alors } P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) + \dots + P(A_n) \cdot P(B/A_n)} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Exercice 1 Circuit électrique

1. Soient A, B, C trois événements. Montrer que :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

2. On dispose de 3 composants électriques C_1, C_2 et C_3 dont la probabilité de fonctionnement est p_i , et de fonctionnement totalement indépendant les uns des autres. Donner la probabilité de fonctionnement du circuit

- 2.1. si les composants sont disposés en série.
- 2.2. si les composants sont disposés en parallèle.
- 2.3. si le circuit est mixte : C_1 est disposé en série avec le sous-circuit constitué de C_2 et C_3 en parallèle.

Exercice 2

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer

1. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1;
2. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse;
3. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 3

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
- 98% des boîtes non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boîte du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte est abîmée" et par D l'événement "la boîte achetée contient au moins une clé défectueuse".

1. Donner les probabilités de $P(A), P(\bar{A}), P(D|A), P(D|\bar{A}), P(\bar{D}|A)$ et $P(\bar{D}|\bar{A})$. En déduire la probabilité de D .
2. Le client constate qu'une des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée?

Exercice 4

Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0,05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle. Quelle est la probabilité

1. qu'il y ait une erreur de contrôle?
2. qu'une pièce acceptée soit mauvaise?

Exercice 5

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1 , R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1 , 50% pour la classe R_2 , et 30% pour la classe R_3 . Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année?
2. Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque?

Exercice 6

Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 50% des peupliers, et 20% des hêtres. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des peupliers, et 25% des hêtres. Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne? un peuplier? un hêtre?

Les rôles spécifiques dans le groupe

Animateur

- S'assure que l'équipe suit les étapes prévues
- Anime les rencontres et la discussion :
 - distribue la parole, suscite/sollicite la participation ou modère les interventions
 - amène l'équipe à clarifier les idées développées
 - réalise des synthèses
- Crée un climat où tous sont invités à participer
 - S'assure que tout le monde a la chance de s'exprimer
 - Motive les silencieux à faire valoir leurs idées et opinions.



Scribe

- Note au tableau l'essentiel des échanges (support et mémoire de la discussion de l'équipe)
- Résume et fait la synthèse des informations pour aider l'animateur
- Organise le tableau en fonction des étapes (de manière à garder la trace de toute la réflexion → ne pas effacer).



Secrétaire

- Garde une trace écrite et complète des documents et de la production de l'équipe
- Transmet cette trace à tous les membres de l'équipe et au tuteur.



Gestionnaire du temps

Pour alléger la tâche de l'animateur, un gestionnaire du temps peut être désigné pour :

- S'assurer du respect du timing pour chaque étape et du timing général
- Informer l'équipe régulièrement (ex : il nous reste 30 minutes pour cette séance)
- S'assurer que le travail progresse et que l'équipe n'accumule pas de retard



Consignes

- Ces rôles ne sont que secondaires, votre premier rôle, à chacun, est avant tout de résoudre les exercices, **tout le monde doit participer !**
- A la fin de chaque exercice, faire en sorte que **tous les membres du groupe ont bien compris** sa résolution avant de poursuivre,
- Je circulerai de groupe en groupe, et vous poserai quelques questions pour vous aider si besoin est, et/ou pour m'assurer que tous les membres du groupe ont bien compris.
- **Le secrétaire** devra inscrire les noms des étudiants de chaque groupe en haut à gauche de sa feuille de rédaction. **A la fin de la séance, chaque étudiant devra photographier la copie du secrétaire.**
- **Tous les membres du groupe devront me remettre sur moodle** à l'emplacement TP1 les photos converties en pdf, et terminer les exercices inachevés (et les fusionner avec le pdf précédent).