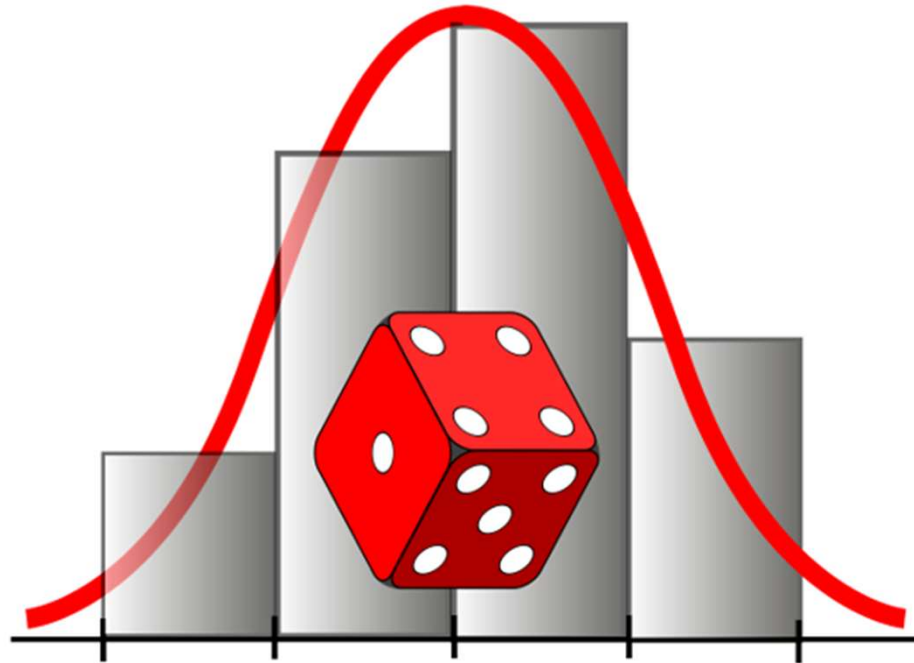


Probabilité

Correction du TP2

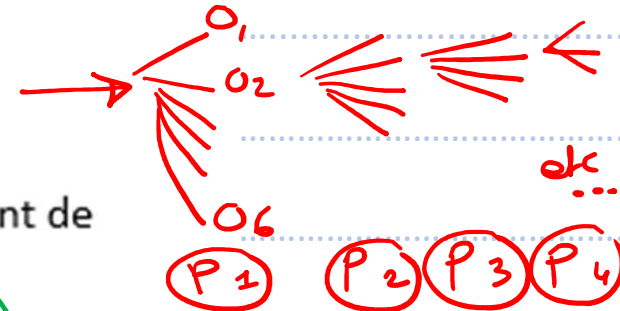
Chapitre 1 : Variables aléatoires discrètes et continues



Exercice 1 Petits problèmes

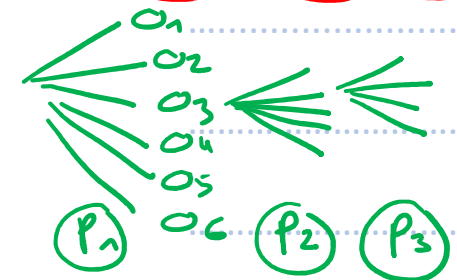
- a) S'il faut répartir 6 postes de travail entre 6 ouvriers, le nombre de solutions possibles

est $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ (permutation)



- b) S'il faut répartir trois postes de travail entre 6 ouvriers, les trois postes étant de nature différente, le nombre de solutions possibles est

$6 \times 5 \times 4 = 120$ (arrangement: $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!}$)



- c) S'il faut répartir 3 postes de travail identiques entre 6 ouvriers, le nombre de solutions possibles est

C'est comme choisir 3 ouvriers parmi 6 sans ordre (ni répétition, bien sûr!)

$$C_6^3 = \binom{6}{3}$$

$$= \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{\cancel{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{3 \times 2 \times 1} \times \cancel{3 \times 2 \times 1}} = 20$$

Exercice 2

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1.

- 1.1. Combien y-a-t-il de codes possibles?
- 1.2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
- 1.3. Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4?
- 1.4. Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4?

2. Dans les questions suivantes, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

- 2.1. Combien y-a-t-il de codes possibles?
- 2.2. Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
- 2.3. Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6?

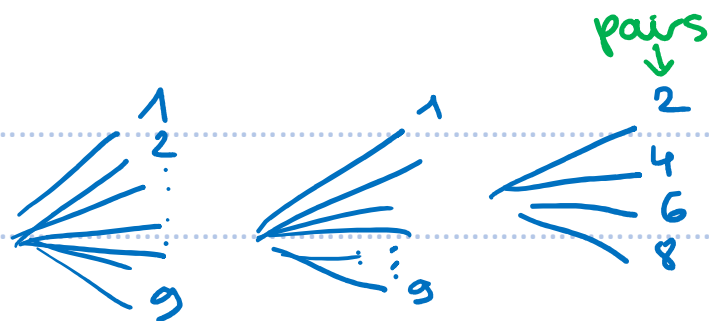
① 1.1) Ça revient à choisir 3 chiffres parmi 9 avec ordre et répétition.
C'est donc une 3-liste :



nbre de possibilités : $9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$

Ω est l'ensemble des codes, alors $\text{card } \Omega = 729$

1.2)



chiffre ① ② ③

nbre de possibilités $9 \times 9 \times 4 = 324$.

1.3) "Il y a au $\ominus$ un chiffre 4" = A

Le contraire serait : "il y a aucun chiffre 4" = $\bar{A}$

Card $\bar{A} = 8 \times 8 \times 8 = 512$ et Card A = Card Ω - Card $\bar{A} = 729 - 512 = 217$

Quest Sup. Calculer $P(A) = \frac{217}{729}$

1.4) "le code contient exactement un chiffre 4" = B.

Cela revient à choisir la place de ce chiffre 4, il y a donc 3 possibilités, puis à choisir les deux autres chiffres parmi 8 : $3 \times 8 \times 8 = 192$

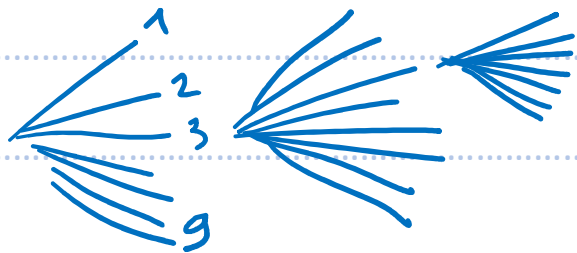
Question Supplémentaire :

Quelle est la probabilité pour que "le dernier chiffre du code soit un nombre pair" ? $\rightarrow$ Pair

$$\frac{324}{729} = \frac{\text{Card "Pair"}}{\text{Card } \Omega}$$

② les 3 chiffres sont distincts

②.1



chiffres

①

②

③

Nombre possibilités

$$9 \times 8 \times 7$$

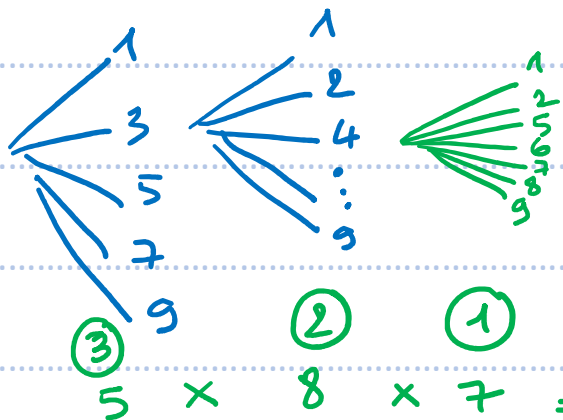
$$= 504$$

ordre sans répétition

← c'est un arrangement

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 504$$

②.2



chiffre
Nombre

③

②

①

$$5 \times 8 \times 7 = 280$$

②.3 3 places pour le 6, puis 8 pour l'autre chiffre et 7 : $3 \times 8 \times 7 = 168$.

Exercice 3

Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

1. On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.
 - 1.1. Donner le nombre de résultats possibles.
 - 1.2. Combien de ces résultats amènent
 - 1.2.1. exactement 1 jeton noir ?
 - 1.2.2. au moins 1 jeton noir ?
 - 1.2.3. au plus un jeton noir ?
 - 1.2.4. 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?
2. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.
3. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

$$\Omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, N_1, N_2, \dots, N_8\}$$

① Ordre + remise : 6-liste

①.1 $13^6 = 4\,826\,809$ résultats

①.2 1) il y a 8 jetons noirs donc 8 choix, et il faut le placer parmi les 6 tirés : 6
il faut ensuite choisir les 5 jetons restant parmi les 5 jetons blancs : 5^5
6 qui donne : $8 \times 6 \times 5^5 = 150\,000$. et le cardinal cherché

1.2.2) A = "Au moins un jeton noir" est le contraire de "aucun jeton noir" = $\bar{A}$

$$\text{Card } \bar{A} = 8^6$$

donc $\text{Card } A = \text{Card } \Omega - \text{Card } \bar{A} = 13^6 - 5^6 = 4\,811\,184$ } revient à choisir 6 jetons blancs (il y en a 5)

1.2.3) B "Au plus un jeton noir", c'est soit aucun, soit un seul:

Réponse 1.2.1 $\oplus$ $\text{Card } \bar{A} = 8 \times 6 \times 5^5 + 5^6 = 165\,625 = \text{Card } B$

1.2.4) D = "deux fois plus de jetons noirs que de jetons blancs" (8) (5)

la seule possibilité est le choix de 2 jetons blancs (et) de 4 noirs

$$\left[\begin{array}{l} \text{place des 2 jetons et choix des 2 jetons} \\ \text{parmi les 6 places} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{l} \text{choix de 4 jetons parmi 8} \\ \text{(ordre et répétition)} \end{array} \right] = \frac{6!}{4!2!} \times 5^2 \times 8^4 = 15 \times 5^2 \times 8^4$$

$$\text{Ou} \quad C_6^4 \times 8^4 \times 5^2 = \frac{6!}{2!4!} \times 5^2 \times 8^4 = 15\,360\,000 = \text{Card } D$$

② Tirages successifs sans remise. (Arrangement)

2.1) $A_{13}^6 = 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 1\,235\,520.$

2.2.1) C "1 jeton noir exactement"

choix du jeton noir: 8 et choix de sa place: 6 et choix de 5 blancs
(ordre sans tenir)

$$\text{Card } C = 8 \times 6 \times \binom{5}{5} = 5! = 5760.$$

2.2.2) A "au moins 1 jeton noir"

$\bar{A}$ = "aucun jeton noir" = "choix de 6 jetons
blancs parmi 5 sans répétition"

C'est impossible! $\bar{A} = \emptyset$

donc $\text{Card } A = \text{Card } \Omega = 1\,235\,520.$

2.2.3) B "Au plus un jeton noir" = "1 jeton noir exactement" $\text{Card } B = 5760.$

2.2.4) D = "2x plus de jetons noirs que de blancs"

$$C_6^2 \times A_5^2 \times A_8^4 = 15 \times 5 \times 4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 504000.$$

③ Tirages simultanés =

$$\underline{3.1)} \quad C_{13}^6 = \frac{13!}{7! \times 6!} = \frac{13 \times \cancel{12} \times 11 \times \cancel{10} \times \overset{3}{9} \times \overset{4}{8}}{6 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}} = 13 \times 11 \times 3 \times 4 = 1716.$$

$$\underline{3.2.1)} \quad C: "1 \text{ jeton noir exactement}": C_1^8 \text{ et les 5 parmi les blancs.}$$

$$C_1^8 \times 1 = 8 = \text{card } C$$

$$\underline{3.2.2)} \quad A: "au moins 1 \text{ jeton noir}"$$

$$\bar{A}: "aucun \text{ jeton noir}" \text{ est impossible } \text{card } \bar{A} = 0 \text{ et } \text{card } A = 1716$$

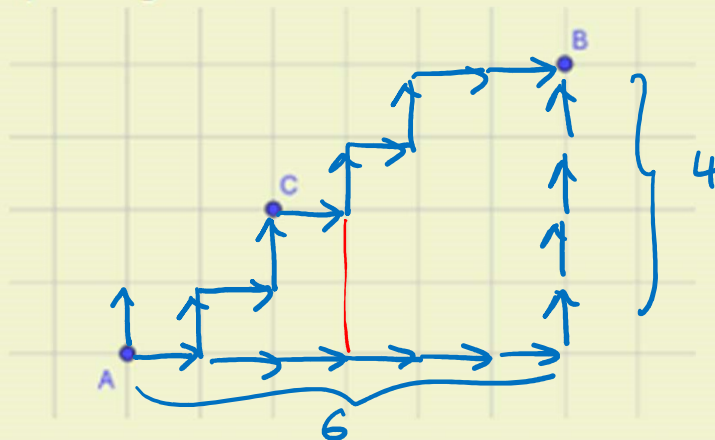
$$\underline{3.2.3)} \quad B: "au \oplus \text{ un jeton noir}" = \bar{A} \cup C \text{ donc } \text{card } B = 8$$

$$\underline{3.2.4)} \quad D: "2 \otimes \text{ plus de jetons noirs que de blancs}": C_5^2 \times C_8^4$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \times \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \times 2 \times \overset{2}{\cancel{8}} \times \cancel{7} \times \cancel{6} \times 5}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}} = 5 \times 2 \times 7 \times 5 = 700.$$

Exercice 4

Un robot se déplace le long du quadrillage suivant :



Il part de A et se rend en B en faisant une suite de mouvements d'un pas de gauche à droite ou d'un pas de bas en haut.

1. Combien y-a-t-il de chemins possibles ?
2. Combien y-a-t-il de chemins possibles passant par C ?

1) Cela revient à choisir 6 pas vers la droite et vers le haut sur 10 déplacements

$$C_{10}^6 \text{ ou } C_{10}^4 \\ \frac{10!}{4!6!} = \frac{10!}{6!4!} = 210$$

2) Pour aller à C : 2 vers la droite et 2 vers le haut

de C à B : 4 vers la droite et 2 vers le haut

$$C_4^2 \times C_6^4 = 90$$