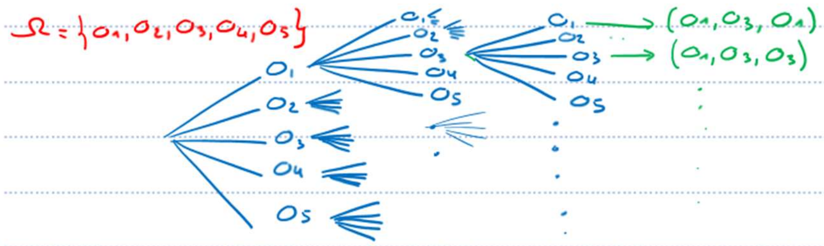
TP2 Tableaux blancs du semestre 5
Programme : Analyse combinatoire (dénombrement) et probabilités

<u>Introduction</u> Comment déterminer le nombre de façons de choisir trois éléments parmi cinq ? Tout dépend de la manière de choisir ces 3 éléments (l'énoncé doit le préciser) :

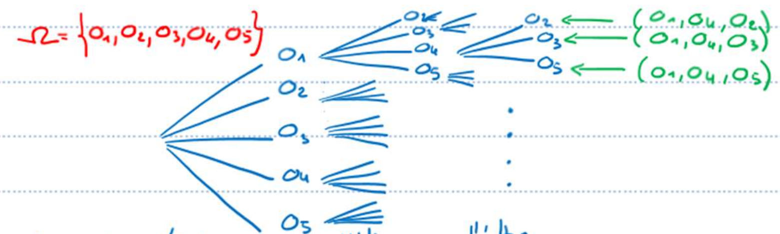
1) **« Avec ordre et répétition »** : Soit on choisit les trois éléments les uns après les autres, en les remettant dans l'ensemble après chaque prélèvement.



choix de : l'élément 1 élt 2 élt 3
possibilités : 5 × 5 × 5 $= 5^3 = 125$ façons de choisir 3 éléments, avec ordre et répétition, dans un ensemble à 5 éléments.

<u>**Généralisation**</u> **: Il y a n^p façons de choisir p éléments parmi les n éléments de Ω, avec ordre et répétition. (p≤n). On dit qu'il y a n^p p-listes formés d'éléments de Ω.**

2) **« Avec ordre et sans répétition »** : Soit on choisit les trois éléments les uns après les autres, sans les remettre dans l'ensemble après chaque prélèvement. Dans ce cas-là, il s'agit d'un « arrangement de 3 éléments parmi 5 ».



choix de : l'élément 1 l'élt 2 l'élt 3
possibilités : 5 × 4 × 3 = 60 façons de choisir 3 éléments, avec ordre et sans répétition, dans un ensemble à 5 éléments.

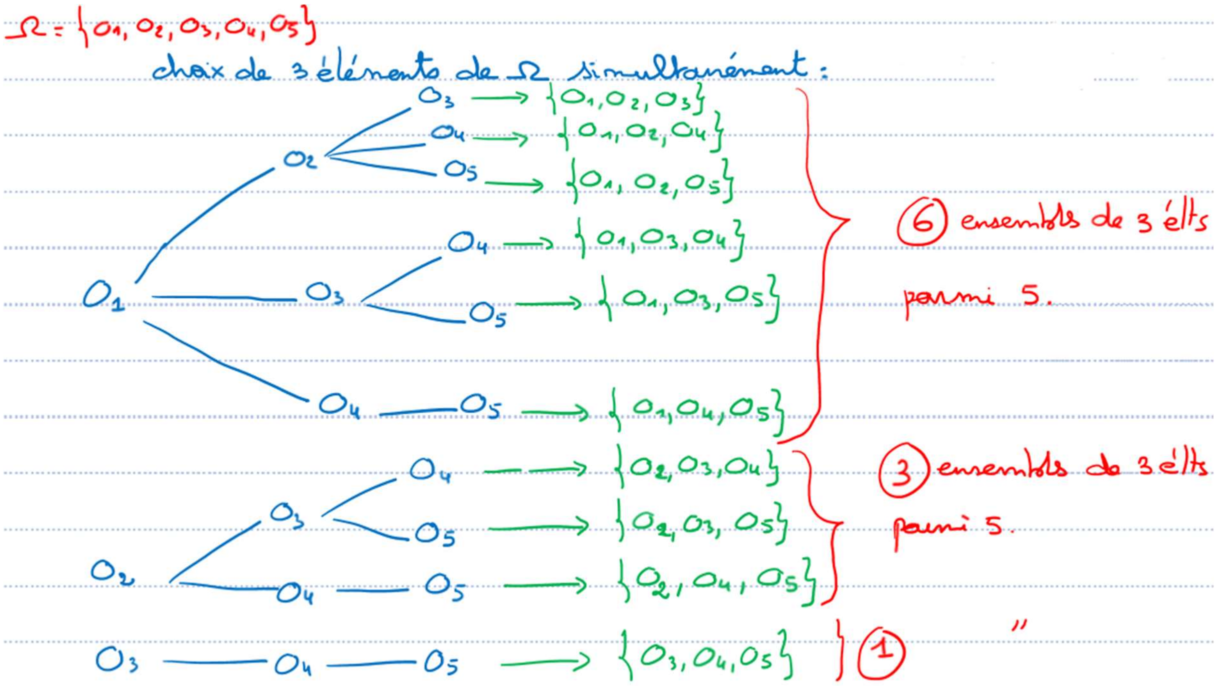
Il s'agit d'un arrangement de 3 éléments parmi 5, il y en a : $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2} = 60$

<u>**Généralisation**</u> **: Il y a $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ façons de choisir p éléments parmi n, avec ordre et sans répétition. (p≤n). On parle alors d'arrangements de p parmi n.**

<u>**Cas particulier**</u> **: Lorsque p = n, on parle de permutations de n éléments, il y a n ! façons de**

permuter les n éléments d'un ensemble contenant n éléments.

3) « Sans ordre ni répétition » : Soit on choisit les trois éléments simultanément dans l'ensemble. Dans ce cas-là, il s'agit d'une « combinaison de 3 éléments parmi 5 ».



Une combinaison de 3 éléments parmi 5, c'est donc un arrangement de 3 éléments parmi 5, mais sans tenir compte de l'ordre, de ce fait, on divise A_5^3 par le nombre de façons d'ordonner 3 éléments (permutation de 3 éléments) : 3 !

Ce qui donne : $C_5^3 = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$

<u>Généralisation</u> : Il y a $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ façons de choisir p éléments parmi n, sans ordre ni répétition (p≤n). On parle alors de combinaisons de p parmi n. On note aussi :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\ p!}$$

Exercice 1 **Petits problèmes**

a) S'il faut répartir 6 postes de travail entre 6 ouvriers, le nombre de solutions possibles

est …………………………………………………………………………………………………

b) S'il faut répartir trois postes de travail entre 6 ouvriers, les trois postes étant de nature différente, le nombre de solutions possibles est

…………………………………………………………………………………………………

c) S'il faut répartir 3 postes de travail identiques entre 6 ouvriers, le nombre de solutions possibles est

…………………………………………………………………………………………………

Exercice 2

Un cadenas possède un code à **3** chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de **1** à **9**.

1.

- **1.1.** Combien y-a-t-il de codes possibles?
- **1.2.** Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair?
- **1.3.** Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre **4**?
- **1.4.** Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre **4**?

2. Dans les questions suivantes, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

- **2.1.** Combien y-a-t-il de codes possibles?
- **2.2.** Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair?
- **2.3.** Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre **6**?

Exercice 3

Un sac contient 5 jetons blancs et 8 jetons noirs. On suppose que les jetons sont discernables (numérotés par exemple) et on effectue un tirage de 6 jetons de ce sac.

1. On suppose que les jetons sont tirés successivement en remettant à chaque fois le jeton tiré.

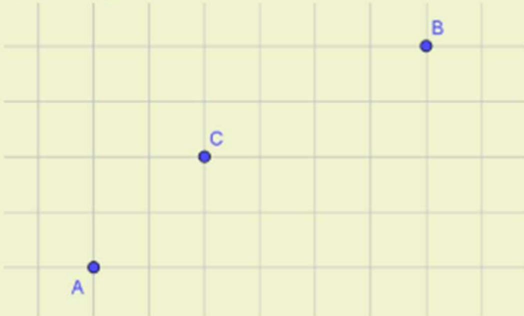
- **1.1.** Donner le nombre de résultats possibles.
- **1.2.** Combien de ces résultats amènent
  - **1.2.1.** exactement 1 jeton noir ?
  - **1.2.2.** au moins 1 jeton noir ?
  - **1.2.3.** au plus un jeton noir ?
  - **1.2.4.** 2 fois plus de jetons noirs que de jetons blancs ?

2. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés successivement sans remise.

3. Mêmes questions en supposant que les jetons sont tirés simultanément.

Exercice 4

Un robot se déplace le long du quadrillage suivant :



Il part de A et se rend en en B en faisant une suite de mouvements d'un pas de gauche à droite ou d'un pas de bas en haut.

1. Combien y-a-t-il de chemins possibles ?
2. Combien y-a-t-il de chemins possibles passant par C ?