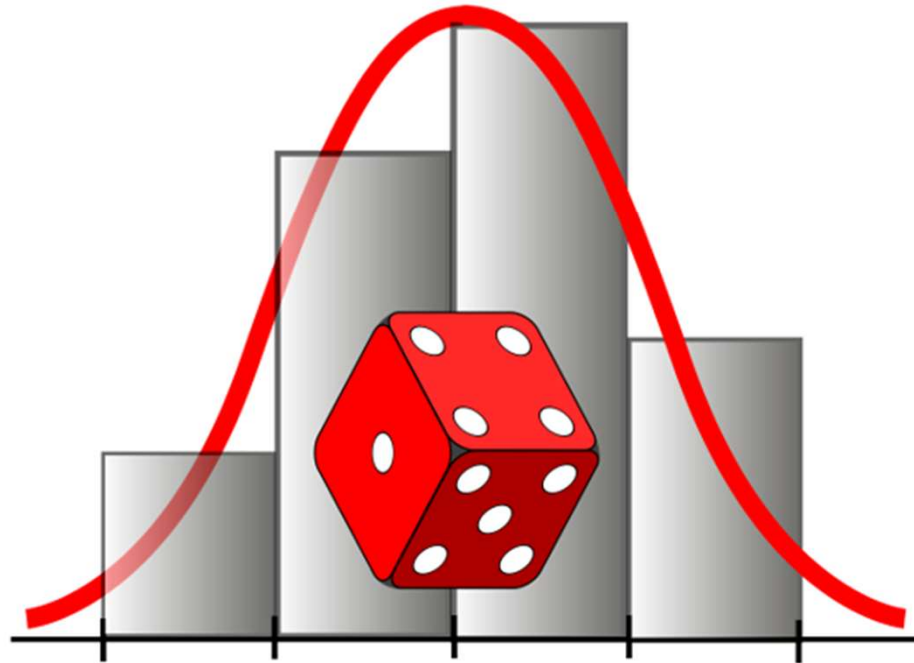


Probabilité

Correction du TP3

Chapitre 1 : Variables aléatoires discrètes et continues



Exercice 1 :

Soit la variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité définie par :

X	x_i	2	4	6
P(X=x _i)		0,2	0,5	0,3

Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité, puis calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X.

→ Il s'agit bien d'une loi de probabilité car la somme des probabilités vaut 1 :

$$p(x=2) + p(x=4) + p(x=6) = 0,2 + 0,5 + 0,3 = 1.$$

$$\rightarrow E(x) = \sum_i x_i p(x=x_i) = 2 \cdot p(x=2) + 4 \cdot p(x=4) + 6 \cdot p(x=6) = 4,2$$

$$\rightarrow V(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

x^2	4	16	36
$p(x^2=x^2)$	0,2	0,5	0,3

$$V(x) = 4 \times 0,2 + 16 \times 0,5 + 36 \times 0,3 - (4,2)^2$$

$$V(x) = 0,8 + 8 + 10,8 - 17,64 = 1,96$$

$$\text{Donc } \sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx 1,4$$

Exercice 2 :

Un jeu consiste à lancer deux dés D_1 et D_2 et à compter la somme des résultats X_1 et X_2 . Soit $Y = X_1 + X_2$.

- Calculer la probabilité d'obtenir $Y = 6$.
- Dresser le tableau de la loi de probabilité de la variable aléatoire Y .
- Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de Y .

a) $E = \text{"lancer deux dés"}$

$D_2 \backslash D_1$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$\Omega = \{(1,1); (1,2); \dots; (6,6)\}$$

$$Y(\Omega) = \{2; 3; \dots; 12\} \stackrel{\text{noté}}{=} [2; 12]$$

entiers compris entre 2 et 12.

$$a) P(Y=6) = \frac{\text{Card}(Y=6)}{\text{Card } \Omega} = \frac{5}{36}$$

$$c) E(X) = \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36}$$

$$E(X) = \frac{252}{36} = 7$$

b)

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	TOTAL
$P(Y=y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	
	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$			$\frac{1}{6}$						

$$d) V(X) = E(X^2) - E^2(X) \approx 5,83$$

$$\text{donc } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 2,42$$

Exercice 3 :

Un atelier est constitué de quatre machines utilisées pour la même production. Le taux d'avaries de chacune d'elles, ramené en journées entières d'indisponibilité, est le suivant :

Machine A : 5 jours d'arrêt pour 200 jours ouvrables ;

Machine B : 3 jours d'arrêt pour 200 jours ouvrables ;

Machine C : 7 jours d'arrêt pour 200 jours ouvrables ;

Machine D : 10 jours d'arrêt pour 200 jours ouvrables ;

D'où les probabilités suivantes, un jour quelconque :

$P(\bar{A}) = 0.025$; $P(\bar{B}) = 0.015$; $P(\bar{C}) = 0.035$; $P(\bar{D}) = 0.050$, en appelant :

$\bar{A}$ l'évènement « la machine A est en avarie » ;

A l'évènement « la machine A est en état de marche » ... etc.

$P(A) = 0,975$; $P(B) = 0,985$; $P(C) = 0,965$; $P(D) = 0,95$

- 1) Déterminer la loi de probabilité de la variable X : « Nombre de machines en avarie », un jour quelconque.
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir au moins trois machines en état de marche, un jour quelconque ?
- 3) Déterminer l'espérance mathématique E(X). En déduire, sur une durée de 200 jours ouvrables, le nombre total de journées de travail des quatre machines.

• $P(X=3) = P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap \bar{D}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap \bar{D}) + P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap D)$

← Somme car réunion disjointe

①

X	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,88	0,11	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$9,9 \cdot 10^{-5}$	$6,6 \cdot 10^{-7}$

• $P(X=0) = P(A \cap B \cap C \cap D)$

le fonctionnement des machines étant

indépendant, $P(X=0) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times P(D)$

$P(X=0) = (1 - P(\bar{A})) (1 - P(\bar{B})) (1 - P(\bar{C})) (1 - P(\bar{D}))$

$P(X=0) = \frac{195}{200} \times \frac{197}{200} \times \frac{193}{200} \times \frac{190}{200} \approx 0,8804$

$P(X=3) = 0,975 \times 0,015 \times 0,035 \times 0,05 + 0,025 \times 0,985 \times 0,035 \times 0,05 + 0,025 \times 0,015 \times 0,965 \times 0,05 + 0,025 \times 0,015 \times 0,05 \times 0,95$

$P(X=3) \approx 9,9 \cdot 10^{-5}$; $P(X=2) = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C \cap D) + P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cap D) + P(\bar{A} \cap B \cap C \cap \bar{D}) + P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap D) + P(A \cap \bar{B} \cap C \cap \bar{D}) + P(A \cap B \cap \bar{C} \cap \bar{D})$

$P(X=2) \approx 5,2 \cdot 10^{-3}$; $P(X=1) \approx 1 - (0,88 + 5,2 \cdot 10^{-3} + 9,9 \cdot 10^{-5} + 6,6 \cdot 10^{-7}) \approx 0,11$

② Au moins 3 machines en état de marche revient à au plus 1 machine en avarie, donc $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) \approx 0,88 + 0,11$
 $P(X \leq 1) \approx 0,99$

③ $E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X=x_i) = 0 \times 0,88 + 1 \times 0,11 + 2 \times 5,2 \cdot 10^{-3} + 3 \times 9,9 \cdot 10^{-5} + 4 \times 6,6 \cdot 10^{-7}$
 $E(X) \approx 0,12$ cela signifie qu'il y a en moyenne 0,12 machines en avarie sur 200 jeux ou encore qu'il y a en moyenne $4 - 0,12 = 3,88$ machines en fonctionnement sur 200 jeux. Le nombre total de travail de 4 machines est donc :
 $200 \times 3,88 = 776$ jours environ.

Exercice 4 :

Soit un stock « très important » de pièces de même fabrication, dans lequel on puise au hasard 4 pièces. On sait par ailleurs que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse est $p = 0,05$. Déterminer la probabilité pour que l'échantillon ne comporte pas plus d'une pièce défectueuse (P).

Soit X la variable aléatoire : "nombre de pièces défectueuses sur les 4 pièces puisées au hasard"

Soit E : "On choisit une pièce au hasard" expérience à 2 issues : ^{succès} la pièce est défectueuse
 $p(\text{succès}) = p = 0,05$.
elle ne l'est pas
^{échec}

On répète 4 fois l'expérience E (de façon indépendante).

Alors $X \sim \mathcal{B}(4; 0,05)$

$$\begin{aligned}\text{On cherche } P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) = C_4^0 p^0 (1-p)^4 + C_4^1 p^1 (1-p)^3 \\ &= 1 \cdot 0,95^4 + 4 \cdot 0,05 \cdot 0,95^3\end{aligned}$$

$$P(X \leq 1) \approx 0,99$$

Exercice 6 :

La probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse est $p = 0,09$. Un acheteur achète un lot de 40 pièces. Calculer les probabilités de n'avoir aucune pièce défectueuse dans le lot, d'avoir au plus deux pièces défectueuses.

$X =$ "nbre de pièces défectueuses parmi les 40 pièces"

$\varepsilon =$ "choix d'une pièce" à deux issues : pièce défectueuse $p = 0,09$

Alors $X \sim \mathcal{B}(40; 0,09)$

$$* P(X=0) = C_{40}^0 0,09^0 \cdot 0,91^{40} \approx 0,023$$

$$* P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$\begin{aligned} &= C_{40}^0 0,09^0 \cdot 0,91^{40} + C_{40}^1 0,09^1 \cdot 0,91^{39} + C_{40}^2 0,09^2 \cdot 0,91^{38} \\ &= 0,91^{40} + 40 \times 0,09 \times 0,91^{39} + 20 \times 39 \times 0,09^2 \times 0,91^{38} \end{aligned}$$

$$\frac{40!}{38! \cdot 2!} = \frac{40 \times 39}{2} = 20 \times 39$$

$$P(X \leq 2) \approx 0,289$$

Exercice 7 :

Une variable X suit la loi binomiale $B(50; p)$. Déterminer p pour que la probabilité $P(X=0) \geq 0,85$.

$$\begin{aligned} P(X=0) &= C_{50}^0 p^0 (1-p)^{50} \geq 0,85 \Leftrightarrow (1-p)^{50} \geq 0,85 \\ &\Leftrightarrow 50 \ln(1-p) \geq \ln(0,85) \quad \swarrow \ln \uparrow \\ &\Leftrightarrow \ln(1-p) \geq \frac{\ln(0,85)}{50} \quad \swarrow \exp \uparrow \\ &\Leftrightarrow 1-p \geq e^{\frac{\ln(0,85)}{50}} \\ &\Leftrightarrow -p \geq e^{\frac{\ln(0,85)}{50}} - 1 \\ &\Leftrightarrow p \leq 1 - e^{\frac{\ln(0,85)}{50}} \simeq 0,00324 \end{aligned}$$

$$P(X=0) \geq 0,85 \quad \text{pour} \quad p \leq 0,00324$$