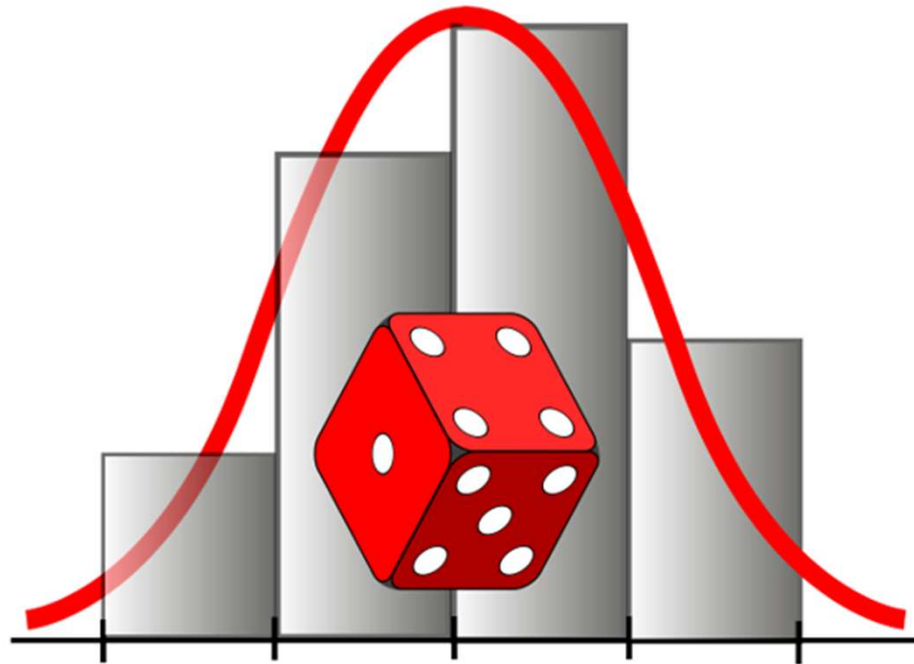


Probabilité

Correction du TP4

Chapitre 1 : Variables aléatoires discrètes et continues



Exercice 8 :

Dans la production d'une machine, une pièce a la probabilité $p=0.05$ d'être défectueuse. On cherche à déterminer la taille minimale n de l'échantillon, qui permettra d'avoir au moins 5 bonnes pièces, avec une probabilité d'au moins 0.98.

Soit X le nombre de bonnes pièces de l'échantillon.

- 1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X , en admettant que l'on prélève l'échantillon dans un stock très important ?
- 2) On cherche à déterminer n pour que $P(X \geq 5) \geq 0.98$, ou, ce qui est équivalent, $P(X < 5) \leq 0.02$.
 - a) Calculer $P(X = 4)$, pour $n = 6$, $n = 7$ et $n = 8$. On en déduira que n doit être au moins égale à 7.
 - b) Pour $n = 7$, calculer $P(X < 5)$
 - c) Répondre à la question posée.

① $X =$ nbre de bonnes pièces.

$X \leadsto B(n; 0.95)$ car :

L'expérience est : prélever une pièce et la tester.

Les deux issues sont : la pièce est défectueuse ou succès non. On recommence n fois l'expérience.

Vu que la taille de l'échantillon est grand, il y a donc indépendance entre

chaque expérience E .

② a)

=LOI.BINOMIALE.N(4;6;0.95;FAUX)

LOI.BINOMIALE.N(nombre_succès; tirages; probabilité_succès; cumulative)

Si $n = 6$

$$P(X=4) \approx 0.0305 > 0.02$$

Si $n = 7$ donc Si $n = 6$ $P(X < 5) > 0.02$

$$P(X=4) \approx 0.0036 \leq 0.02$$

Si $n = 8$

$$P(X=4) \approx 0.0004 \leq 0.02$$

le n cherché est donc peut-être au moins égal à 7

③ Si $n = 7$

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$
$$\approx 0 + 0 + 0 + 0.0002 + 0.0036$$
$$P(X \leq 4) \approx 0.0038 \leq 0.02$$

④ Pour $n \geq 7$, on obtient $P(X \geq 5) \geq 0.98$

Exercice 9 :

- a) Une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4,5$. Calculer $P(X=0)$ et $P(X \leq 4)$.
- b) Une variable aléatoire suit une loi binomiale $B(75; p)$. Déterminer p à 10^{-3} près pour que $P(X \leq 5) \geq 0,95$.

a) $X \sim \mathcal{P}(4,5)$

$P(X=0) \approx 0,011$

$P(X \leq 4) \approx 0,5321$

=LOI.POISSON(0;4,5;FAUX)

LOI.POISSON(x; espérance; cumulative)

=LOI.POISSON(4;4,5;VRAI)

LOI.POISSON(x; espérance; cumulative)

b) $X \sim \mathcal{B}(75; p)$

$P(X \leq 5) \geq 0,95$

$p \approx 0,035$

=LOI.BINOMIALE.N(5;75;0,035;VRAI)

LOI.BINOMIALE.N(nombre_succès; tirages; probabilité_succès; cumulative)

Raisonnement : j'ai essayé $P(X \leq 5)$ avec la loi de Poisson précédente : $\mathcal{P}(4,5)$

$\mathcal{P}(4,5)$ j'ai trouvé $P(X \leq 5) \approx 0,7$

avec $\mathcal{P}(4)$ " $P(X \leq 5) \approx 0,8$

etc... $\mathcal{P}(3)$ " $P(X \leq 5) \approx 0,952$

$\mathcal{P}(2,59)$ " $P(X \leq 5) \approx 0,952$

$\mathcal{B}(75; p) \approx \mathcal{P}(75p)$ $p \approx \frac{2,59}{75} \approx 0,035$

↑
Approximation de la loi $\mathcal{B}(75; p)$

par la loi de Poisson $\mathcal{P}(75p)$

Exercice 9 :

- a) Une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4,5$. Calculer $P(X=0)$ et $P(X \leq 4)$.
- b) Une variable aléatoire suit une loi binomiale $B(75; p)$. Déterminer p à 10^{-3} près pour que $P(X \leq 5) \geq 0,95$.

a) $X \sim \mathcal{P}(4,5)$

$P(X=0) \approx 0,011$

$P(X \leq 4) \approx 0,5321$

=LOI.POISSON(0;4,5;FAUX)

LOI.POISSON(x; espérance; cumulative)

=LOI.POISSON(4;4,5;VRAI)

LOI.POISSON(x; espérance; cumulative)

b) $X \sim \mathcal{B}(75; p)$

$P(X \leq 5) \geq 0,95$

$p \approx 0,03$

=LOI.BINOMIALE.N(5;75;0,035;VRAI)

LOI.BINOMIALE.N(nombre_succès; tirages; probabilité_succès; cumulative)

Raisonnement : j'ai essayé $P(X \leq 5)$ avec la loi de Poisson précédente : $\mathcal{P}(4,5)$

par Interpolation linéaire:

pour $m=1$ alors $P(X \leq 5) \approx 0,7851$

$m=2$ alors $P(X \leq 5) \approx 0,9834$

$m=?$ $\approx 0,95$

$$\frac{m-1}{0,95-0,7851} = \frac{2-1}{0,9834-0,7851}$$

$$m \approx 1 + \frac{-0,13298}{0,1983}$$

$$m \approx 2,34$$

$\mathcal{B}(75; p) \approx \mathcal{P}(75p)$ $p \approx \frac{2,34}{75} \approx 0,03$

↑
Approximation de la loi $\mathcal{B}(75; p)$

par la loi de Poisson $\mathcal{P}(75p)$

Exercice 10 : Une entreprise de transports possède 80 camions. Chaque camion a une probabilité constante "p" d'être hors service dans une journée. L'entreprise estime que, pour appliquer son planning, elle ne doit pas avoir plus de 3 camions hors service.

- 1) Déterminer la loi que l'on peut appliquer à la variable aléatoire X : " Nombre de camions hors service dans une journée".
- 2) Supposons que l'on puisse approcher cette loi par une loi de Poisson de paramètre m. Déterminer m pour que la probabilité de n'avoir pas plus de 3 camions hors service soit au moins 0.95 (précision sur m : 0.1).
- 3) En déduire la valeur maximale que peut atteindre p.
- 4) Justifier à posteriori l'emploi de la loi de Poisson.

① $X = \text{"nbre de camions HS dans une journée"}$

$$X \sim \mathcal{P}(80; p)$$

② $\mathcal{P}(80; p) \approx \mathcal{P}(m)$

$$m?? \quad P(X \leq 3) \geq 0,95$$

=LOI.POISSON(3;1,36;VRAI)

(LOI.POISSON(x; espérance; cumulative)

$$m \leq 1,3326$$

$$\text{donc } 80p \leq 1,3326$$

③ et $p \leq \frac{1,333}{80} \approx \boxed{0,017}$

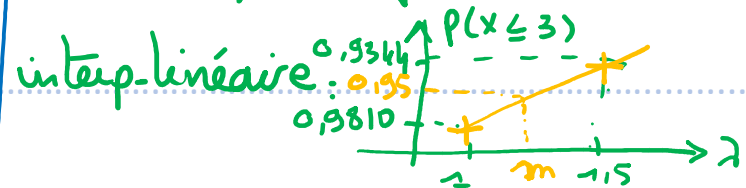
④ D'après le cours : $n = 80 > 50$

$$\text{et } np = 1,36 < 5 \text{ justifient que}$$

l'on peut approximer $\mathcal{P}(80; 1,36)$ par $\mathcal{P}(1,36)$

Remarque Si $m = 1$, alors $P(X \leq 3) \approx 0,9810$

Si $m = 1,5$, alors $P(X \leq 3) \approx 0,9344$ - par



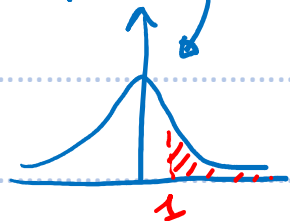
Exercice 11 :

- a) Une variable X suit la loi normale $N(0;1)$. Calculer les probabilités suivantes :
 $P(X < 2)$; $P(X > 1)$; $P(X < -2)$; $P(X > -1)$; $P(-1 < X < 2)$.
- b) X suit la loi normale $N(6;2)$. Calculer les probabilités suivantes : $P(X < 7)$; $P(4 < X < 8)$
- c) X suit la loi normale $N(m,\sigma)$. Déterminer $P(m - \sigma < X < m + \sigma)$, puis $P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$

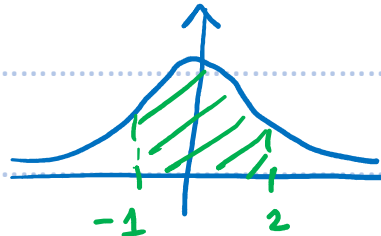
a) $X \sim \mathcal{N}(0;1)$

$p(x < 2) \simeq 0,9772$ par lecture du tableau

$P(x > 1) = 1 - P(x \leq 1) \simeq 1 - 0,8413 = 0,1587$



$$P(-1 < X < 2) = P(X < 2) - \underbrace{P(X < -1)}_{P(X > 1)}$$
$$\simeq 0,9772 - 0,1587$$



$P(-1 < X < 2) \simeq 0,8185$

b) $X \sim \mathcal{N}(6;2)$ On pose $Y = \frac{X-6}{2} \sim \mathcal{N}(0;1)$

$P(X < 7) = P(Y < \frac{1}{2}) \simeq 0,6915$

$$P(4 < X < 8) = P(-1 < X < 1) = 2 \times P(0 < X < 1) = 2 \times \left(\overbrace{P(X < 1)}^{0,8413} - 0,5 \right)$$
$$\simeq 2 \times (0,6826 - 0,5)$$

Avec excel :

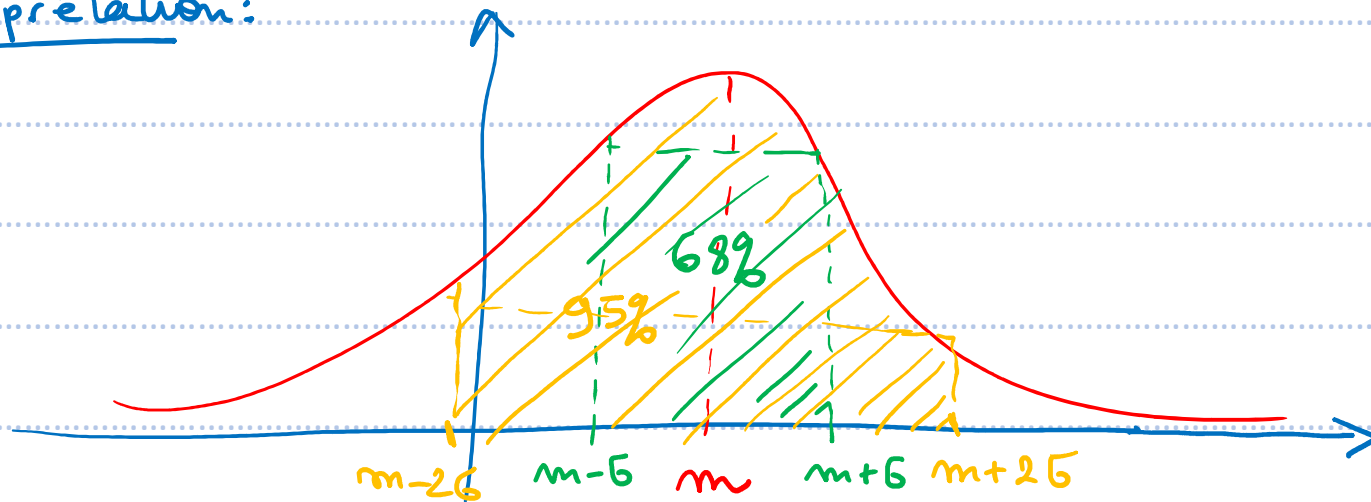
`=LOI.NORMALE(2;0;1;VRAI)`

`LOI.NORMALE(x; espérance; écart_type; cumulative)`

$\simeq 0,9772$

$X \sim \mathcal{P}(m; \sigma)$ donc $Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{P}(0; 1)$
et $P(m-\sigma < X < m+\sigma) = P(-1 < X < 1) \simeq 0,6826$.

Interprétation:



$$\begin{aligned} \text{et } P(m-2\sigma < X < m+2\sigma) &= P(-2 < X < 2) = 2 \times P(0 < X < 2) = 2 \times (P(X < 2) - 0,5) \\ &\simeq 2 \times (0,9772 - 0,5) \\ &\simeq 0,9544. \end{aligned}$$

Exercice 14 :

Dans un aéroport, la durée d'attente X mesurée en minutes pour l'enregistrement des bagages suit une loi exponentielle de paramètre $1/10$.

- 1) Quelle est la densité de probabilité de X ?
- 2) Quelle est la probabilité d'attendre au plus 30 minutes ?
- 3) Quelle est la probabilité que l'attente dépasse une heure ?
- 4) Sachant que l'on a attendu 15 minutes, quelle est la probabilité que l'attente soit encore d'au moins 15 minutes ?

Formule de la loi exponentielle de paramètre λ : $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad P(X \leq 30) = \int_0^{30} \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}} dx = - \left[e^{-\frac{x}{10}} \right]_0^{30} = 1 - e^{-3}$$

$$\textcircled{3} \quad P(X \geq 60) = \int_{60}^{+\infty} \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{60}^T \frac{1}{10} \cdot e^{-\frac{x}{10}} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} - \left[e^{-\frac{x}{10}} \right]_{60}^T = e^{-6}$$

approximation de 60 ($x=15$)

$$\textcircled{4} \quad P((X \geq 15) / (14,5 \leq x \leq 15,5)) = \frac{P(15 \leq x \leq 15,5)}{P(14,5 \leq x \leq 15,5)} \leftarrow P((X \geq 15) \cap (14,5 \leq x \leq 15,5))$$

$$P(15 \leq x \leq 15,5) = \int_{15}^{15,5} f(x) dx = \int_{15}^{15,5} \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}} dx = - \left[e^{-\frac{x}{10}} \right]_{15}^{15,5} = e^{-\frac{15}{10}} - e^{-\frac{15,5}{10}}$$

Rappel:

$$\ln x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$= e^{-1,5} - e^{-1,55} = e^{-1,525} \left(e^{0,025} - e^{-0,025} \right) = 2 \ln(0,025) \cdot e^{-1,525}$$

$$\left(\frac{-1,5 - 1,55}{2} = -\frac{3,05}{2} = -1,525 \right)$$

$$P(14,5 \leq x \leq 15,5) = e^{-\frac{14,5}{10}} - e^{-\frac{15,5}{10}} = e^{-1,45} - e^{-1,55} = e^{-1,5} \left(e^{0,05} - e^{-0,05} \right) = 2 \ln(0,05) \cdot e^{-1,5}$$

donc :

$$P((x \geq 15) / (14,5 \leq x \leq 15,5)) = \frac{2 \ln(0,025) \cdot e^{-1,525}}{2 \ln(0,05) \cdot e^{-1,5}} = \frac{\ln(0,025)}{\ln(0,05)} \cdot e^{-0,025}$$

Exercice 12 :

Une machine usine des pièces dont la longueur X suit une loi normale de moyenne $m = 54$ et d'écart-type $\sigma = 0.2$.

Une pièce est considérée comme défectueuse si $X < 53.6$ ou $X > 54.3$.

- 1) Calculer la probabilité p pour qu'une pièce soit défectueuse. Rép. $P = 0.0896$
- 2) Pour vérifier que la machine n'est pas dérégulée, on détermine des côtes d'alerte $m - h$ et $m + h$ définies par : $P(m - h \leq X \leq m + h) = 0.95$.
Calculer les côtes d'alerte.

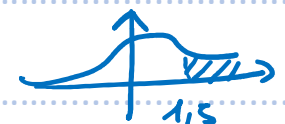
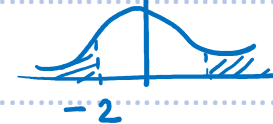
$X \leadsto \mathcal{N}(54; 0,2)$ où $X = \text{"longueur d'une pièce"}$

① $P = P((X < 53,6) \cup (X > 54,3)) = P(X < 53,6) + P(X > 54,3)$
union disjointe car $(X < 53,6) \cap (X > 54,3) = \emptyset$

Soit $Y = \frac{X - 54}{0,2} \leadsto \mathcal{N}(0; 1)$ et $p = P(X < -2) + P(X > 1,5)$

② $P(m - h < X < m + h) = P\left(\frac{m - h - m}{\sigma} < Y < \frac{m + h - m}{\sigma}\right)$
 $= P\left(-\frac{h}{\sigma} < Y < \frac{h}{\sigma}\right) = 2 \cdot P\left(0 < Y < \frac{h}{\sigma}\right)$
 $= 2(P(Y < h/\sigma) - 0,5) = 0,95$

$p = P(X > 2) + 1 - P(X \leq 1,5)$
 $p = 1 - P(X \leq 2) + 1 - P(X \leq 1,5)$



$p \simeq 2 - 0,9772 - 0,9332 = 0,0896$

$$2\left(p\left(Y < \frac{h}{\sigma_{1,2}}\right) + 0,5\right) = 0,95 \Leftrightarrow p\left(Y < \frac{h}{\sigma_{1,2}}\right) = \frac{0,95}{2} - 0,5 = 0,975.$$

Dans le tableau, par lecture inverse, on trouve: $\frac{h}{\sigma_{1,2}} \simeq 1,96 \Leftrightarrow h \simeq 0,392.$

les côtes d'abrite sont donc: $m - h = 54 - 0,392 = 53,608$

et $m + h = 54 + 0,392 = 54,392.$