

TP2 : Série de Fourier complexe et théorème de Parseval

Concernant l'exercice 1 du DM2 :

- 1) Le corriger à l'aide des solutions ci-après
- 2) A l'aide du logiciel Excel, tracer la série de Fourier du signal x jusqu'à l'ordre 7, puis vérifier la conclusion du théorème de Dirichlet
- 3) Appliquer le théorème de Parseval (page 27 du chapitre 1) afin d'obtenir la valeur de la série :

$$\sum_{k>0} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

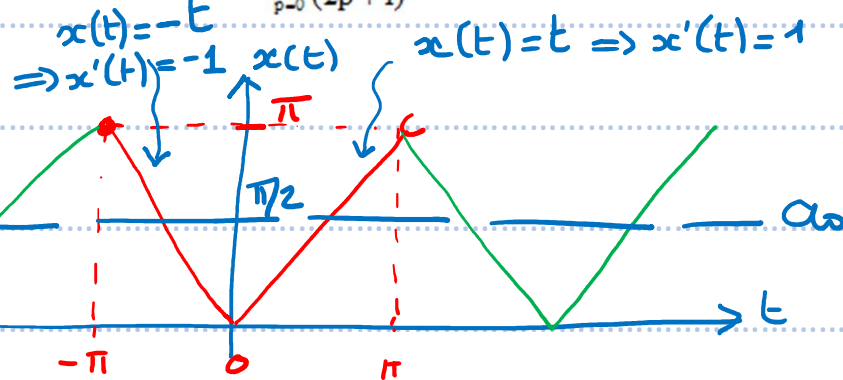
Concernant l'exercice 2 du DM2 :

- 1) Le corriger à l'aide des solutions ci-après
- 2) A l'aide du logiciel Excel, tracer la série de Fourier du signal x jusqu'à l'ordre 6, puis vérifier la conclusion du théorème de Dirichlet
- 3) Calculer les coefficients de Fourier complexe du signal x , à l'aide des formules de la page 26 du chapitre 1. Retrouver alors les coefficients de Fourier réels de x .

Concernant l'exercice 1 du DM2 : 1) Le corriger à l'aide des solutions ci-après

Soit x , la fonction de période 2π , définie par : $x(t) = |t|$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

- 1) Dessiner le graphe de x ,
- 2) Calculer les coefficients de Fourier de x ,
- 3) Montrer que la série de Fourier de x peut s'écrire : $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2}$
- 4) En utilisant le théorème de Dirichlet, montrer que la série de Fourier de x est convergente pour toute valeur de t , quelle est alors sa somme ?
- 5) En déduire la valeur de la série : $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.



- ② $T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$
 x est paire donc $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

* $a_0 = \frac{\pi}{2}$ par lecture graphique

ou : $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x(t)}_{\text{paire}} dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x(t)}_{=|t|=t \text{ car } t > 0} dt$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

* $a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x(t) \cdot \cos(nt)}_{\text{paire}} dt$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{x(t)}_{=|t|=t \text{ car } t > 0} \cdot \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cdot \cos(nt) dt$$

IPP : $\begin{cases} u = t \\ v' = \cos(nt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \left[t \cdot \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\pi} \sin(nt) dt \right\}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi \sin(n\pi)}{n} - 0 - \frac{1}{n} \left[\frac{-\cos(n\pi)}{n} \right]_0^\pi \right\}$$

$n \in \mathbb{N}^+ \text{ donc } = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{1}{n^2} (-\cos(n\pi) + \cos 0) \right\} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

③ Série de Fourier de x : $a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nt)$

$$S_x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos(nt)$$

$$S_x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{-\frac{2}{1^2}}_{n=1} \cos(1t) + \underbrace{0}_{n=2} + \underbrace{-\frac{2}{3^2}}_{n=3} \cos(3t) + \underbrace{0}_{n=4} + \underbrace{-\frac{2}{5^2}}_{n=5} \cos(5t) + \dots \right)$$

Les termes pairs étant tous nuls, on somme

sur les impairs: $S_x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{-2}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)t)$

Donc: $S_x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2}$

④ théorème de Dirichlet:

hyp1: x est continue sur $[-\pi; \pi[$

hyp2: x est dérivable en $[-\pi; \pi[$ sauf en

$-\pi$ et 0 où: $\begin{cases} x'(-\pi^-) = 1 & x'(0^-) = -1 \\ x'(-\pi^+) = -1 & x'(0^+) = +1 \end{cases}$ voir GRAPHES

Conclusion La série de Fourier

de x converge pour tout $x \in \mathbb{R}$

et: $S_x(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2} = x(t)$

$\forall t \in \mathbb{R}$, car x est continue sur $\mathbb{R}$

⑤ $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ s'obtient en

posant $t=0$ dans la conclusion du th. de

$$\text{Dirichlet: } S_x(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = x(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{\pi}{2} \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

Concernant l'exercice 1 du DM2 : 2) A l'aide du logiciel Excel, tracer la série de Fourier du signal x jusqu'à l'ordre 7, puis vérifier la conclusion du théorème de Dirichlet.

Série de Fourier de l'exercice 1 du DM2

t	x(t)	Sx(t)
-3,14159265	3,14159265	3,06242099
-3,04159265	3,04159265	3,03739638
-2,94159265	2,94159265	2,96735083
-2,84159265	2,84159265	2,8655928
-2,74159265	2,74159265	2,7491134
-2,64159265	2,64159265	2,63304117
-2,54159265	2,54159265	2,52634467
-2,44159265	2,44159265	2,43035561
-2,34159265	2,34159265	2,34041387
-2,24159265	2,24159265	2,24959974
-2,14159265	2,14159265	2,15271186
-2,04159265	2,04159265	2,04871063
-1,94159265	1,94159265	1,94070681
-1,84159265	1,84159265	1,82270915

valeur absolue avec excel : $ABS()$

$-\pi \rightarrow$
 $-\pi + 0,1 \rightarrow$

$\pi \rightarrow$

Concernant l'exercice 1 du DM2 : 3) Appliquer le théorème de Parseval
(page 27 du chapitre 1) afin d'obtenir la valeur de la série :

III. Identité de Bessel-Parseval

Soit x une fonction T -périodique ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) développable en série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{p \geq 0} (a_p \cdot \cos(p\omega t) + b_p \cdot \sin(p\omega t))$$

On a alors la formule suivante : $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = a_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$

Ou encore, en utilisant les coefficients de Fourier complexes : $\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$

• En déduire la valeur de :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

Ici

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2(t) dt = a_0^2 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$$

Guidage :

- Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2(t) dt$
- a_0^2 ; a_p^2 ; b_p^2
- Ecrire la formule.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x^2(t)}_{\text{paire}} dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3\pi} (\pi^3 - 0)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2(t) dt = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\bullet a_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_0^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\bullet b_p = 0 \Rightarrow b_p^2 = 0 \quad \forall p \geq 1$$

$$\bullet a_p = \frac{2}{\pi p^2} ((-1)^p - 1) \quad \forall p \geq 1$$

$$\Rightarrow a_p^2 = \frac{4}{\pi^2 p^4} ((-1)^p - 1)^2$$

Parseval:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2(t) dt = a_0^2 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a_p^2 + b_p^2}{2}$$

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\frac{4}{\pi^2 p^4} ((-1)^p - 1)^2}{2}$$

= 0 si p pair
= 4 si p impair

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{p \geq 1} \frac{((-1)^p - 1)^2}{p^4}$$

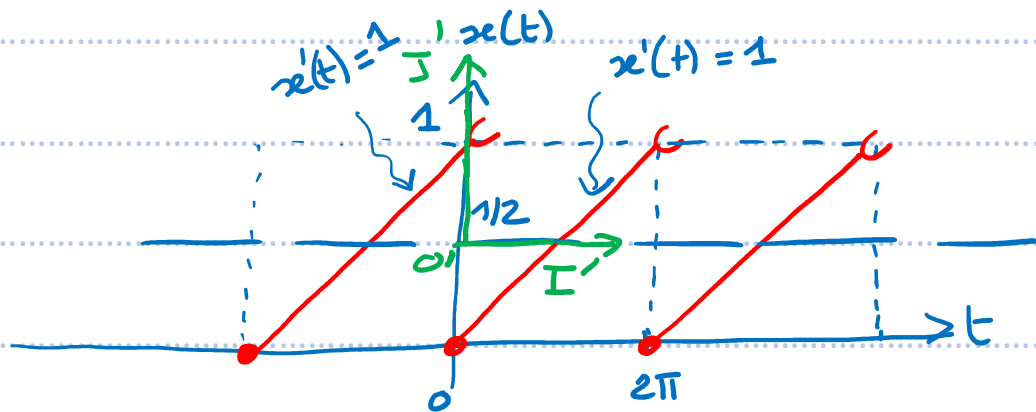
$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \boxed{\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4}}$$

$$\text{Donc: } \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4} \right) \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^4}{96}$$

Concernant l'exercice 2 du DM2 : 1) Le corriger à l'aide des solutions ci-après

Exercice 2 :

Soit x , la fonction 2π -périodique définie par : $x(t) = \frac{t}{2\pi}$ sur $[0, 2\pi[$.



x est ni pair, ni impair.

$$T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 1.$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t}{2\pi} dt = \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad \text{OK}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{t}{2\pi} \cos(nt) dt$$

$$\begin{cases} u = t \\ v' = \cos(nt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = \frac{\sin(nt)}{n} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \left[\frac{t \cdot \sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin(nt) dt \right\}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ 0 - \frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} \right\}$$

$$= \frac{1}{2n^2\pi^2} \cdot (-\cos(2n\pi) + \cos 0) = 0$$

Remarque : On aurait pu retrouver ce

résultat, en remarquant que dans le

repère (O', I', J') le signal est impair et

ainsi $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{t}{2\pi} \sin(nt) dt$$

↻

$$U = t \Rightarrow U' = 1$$

$$V' = \sin(nt) \Rightarrow V = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{-2\pi}{n} + 0 + \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{2\pi}}_{=0} \right\}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi} \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{Série de Fourier de } x = a_0 + \sum_{n \geq 1} b_n \sin(nt)$$

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n}$$

th. de Dirichlet:

hyp1: x est continue sur $[0; 2\pi[$ sauf en 0 où $x(0^-) = 1$ $x(0^+) = 0$ est finis.

hyp2: x est dérivable sur $[0; 2\pi[$ sauf en 0 où $x'(0^-) = x'(0^+) = 1$ **voir GRAPHE**

Conclusion: la série de Fourier de x

converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ vers:

$$S_x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nt)}{n} = \begin{cases} x(t) & \forall t \neq 2k\pi \\ \frac{1}{2} & \forall t = 2k\pi \end{cases}$$

Remarque $t \neq 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, se note aussi $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$

Concernant l'exercice 2 du DM2 : 2) A l'aide du logiciel Excel, tracer la série de Fourier du signal x jusqu'à l'ordre 6, puis vérifier la conclusion du théorème de Dirichlet

Série de Fourier de l'exercice 2 du DM2		
t	x(t)	Sx(t)
0	0	0,5
0,1	0,01591549	0,31378184
0,2	0,03183099	0,15477201
0,3	0,04774648	0,04361775
0,4	0,06366198	-0,01028454
0,5	0,07957747	-0,01031382
0,6	0,09549297	0,02934246
0,7	0,11140846	0,08842316
0,8	0,12732395	0,1465755
0,9	0,14323945	0,18876281
1	0,15915494	0,20855389
1,1	0,17507044	0,20849542
1.2	0,19098593	0,19772733

↓
 $\approx 6,3$

Concernant l'exercice 2 du DM2 : 3) Calculer les coefficients de Fourier complexe du signal x , à l'aide des formules de la page 26 du chapitre 1. Retrouver alors les coefficients de Fourier réels de x .

$$\textcircled{3} \quad C_0 = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt$$

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{t}{2\pi}}_{u=t} e^{-ikt} dt$$

$$\begin{cases} u = t \\ v' = e^{-ikt} \Rightarrow v = \frac{e^{-ikt}}{-ik} \end{cases}$$

$$C_k = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[\frac{t e^{-ikt}}{-ik} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{ik} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} (-ik) dt \right\}$$

$$C_k = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{2\pi \cdot \underbrace{e^{-ik2\pi}}_{=1}}{-ik} + \frac{1}{ik} \left[\frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_0^{2\pi} \right\}$$

$$e^{-ik2\pi} = \cos(k2\pi) - i \sin(k2\pi)$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 - i \cdot 0$$

$$C_k = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{2\pi \cdot i}{-ik} + \frac{1}{(ik)^2} \underbrace{(e^{-ik2\pi} - e^0)}_{=0} \right\}$$

$$C_k = \frac{i}{2\pi k} ; k \in \mathbb{Z}^*$$

Série de Fourier complexe: $C_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} C_k e^{ik\omega t}$

Remarque

$$S_x(t) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{ikt}}{k}$$

Retrouvons les coefficients de Fourier réels:

$$C_0 = \frac{1}{2} \quad C_k = \frac{i}{2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$a_0 = C_0$$

$$\text{et } C_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_k = 2\operatorname{Re}(C_k) \\ b_k = -2\operatorname{Im}(C_k) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_k = 2\operatorname{Re}\left(\frac{i}{2\pi k}\right) = 0 \quad \forall k \geq 1 \\ b_k = -2\operatorname{Im}\left(\frac{i}{2\pi k}\right) = -\frac{1}{k\pi} \quad \forall k \geq 1 \end{cases}$$

Explications: $2C_k = \underbrace{a_k}_{\operatorname{Re}(2C_k)} - ib_k$
 $= 2\operatorname{Re}(C_k)$

$$\text{et } -b_k = \operatorname{Im}(2C_k) \Leftrightarrow b_k = -2\operatorname{Im}(C_k)$$