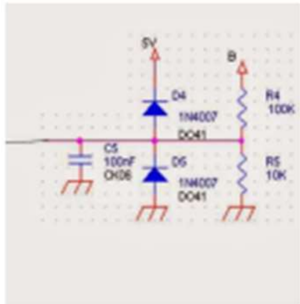
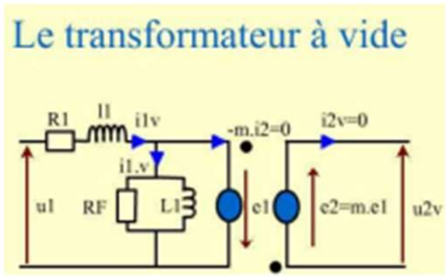
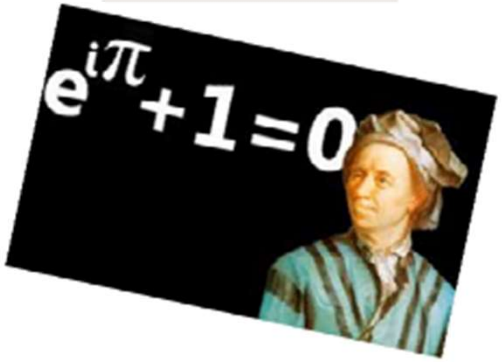
TD et TP 1/2/3 OUTILS LOGICIELS

Résolution numérique d'équations f(x) = 0
Calcul numérique d'une intégrale
Résolution numérique d'une équation différentielle



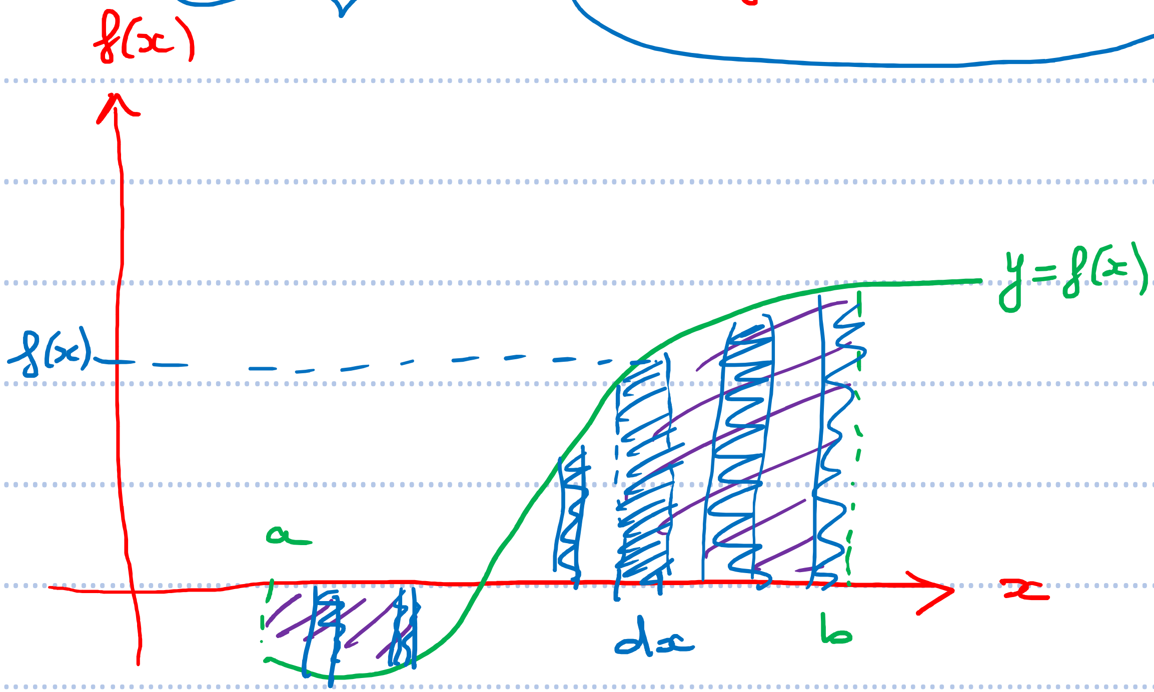




Notes

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx} = \underbrace{\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}_{F'(x) = f(x)}$$

x	a	- - -	b
$f(x)$	$f(a)$	- - -	$f(b)$



Travaux dirigés 4 : Calcul numérique d'une intégrale

Page 15 TD/TP OL

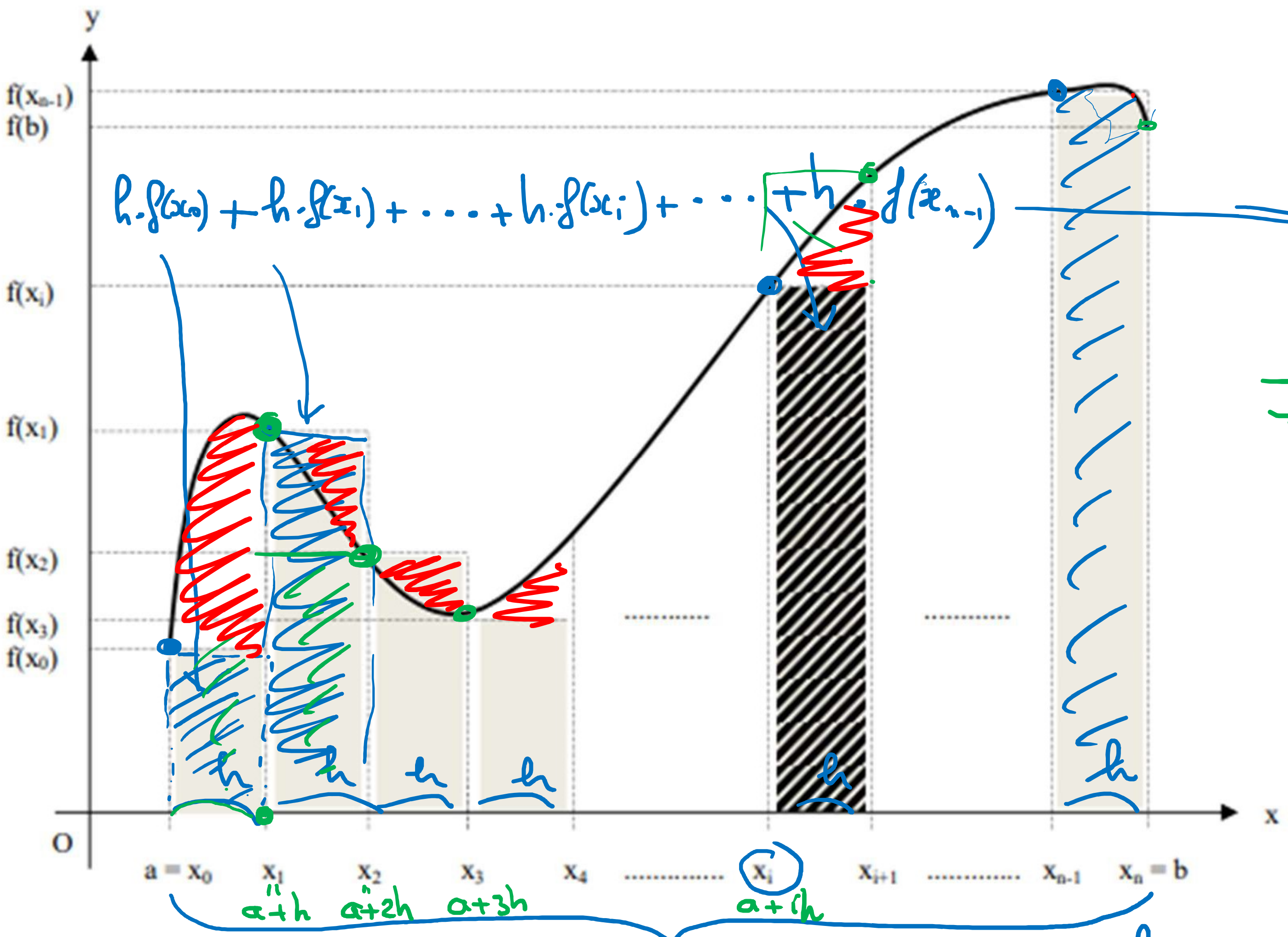
Dans certains cas, bien que f soit intégrable sur [a,b], on ne peut pas calculer $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide de la formule précédente :

- lorsqu'on ne peut pas exprimer F, une primitive de f à l'aide de fonctions usuelles,
- lorsque f est obtenue à partir d'un tableau de valeurs relevé d'expérience physique, ou d'une courbe.

Dans ces cas, on cherche une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ à l'aide, par exemple, de l'une des trois méthodes ci-dessous.

I. <u>Méthode des rectangles</u> : (voir schéma de la définition de l'intégrale)

1) <u>Principe</u>



Page 15 TD/TP OL

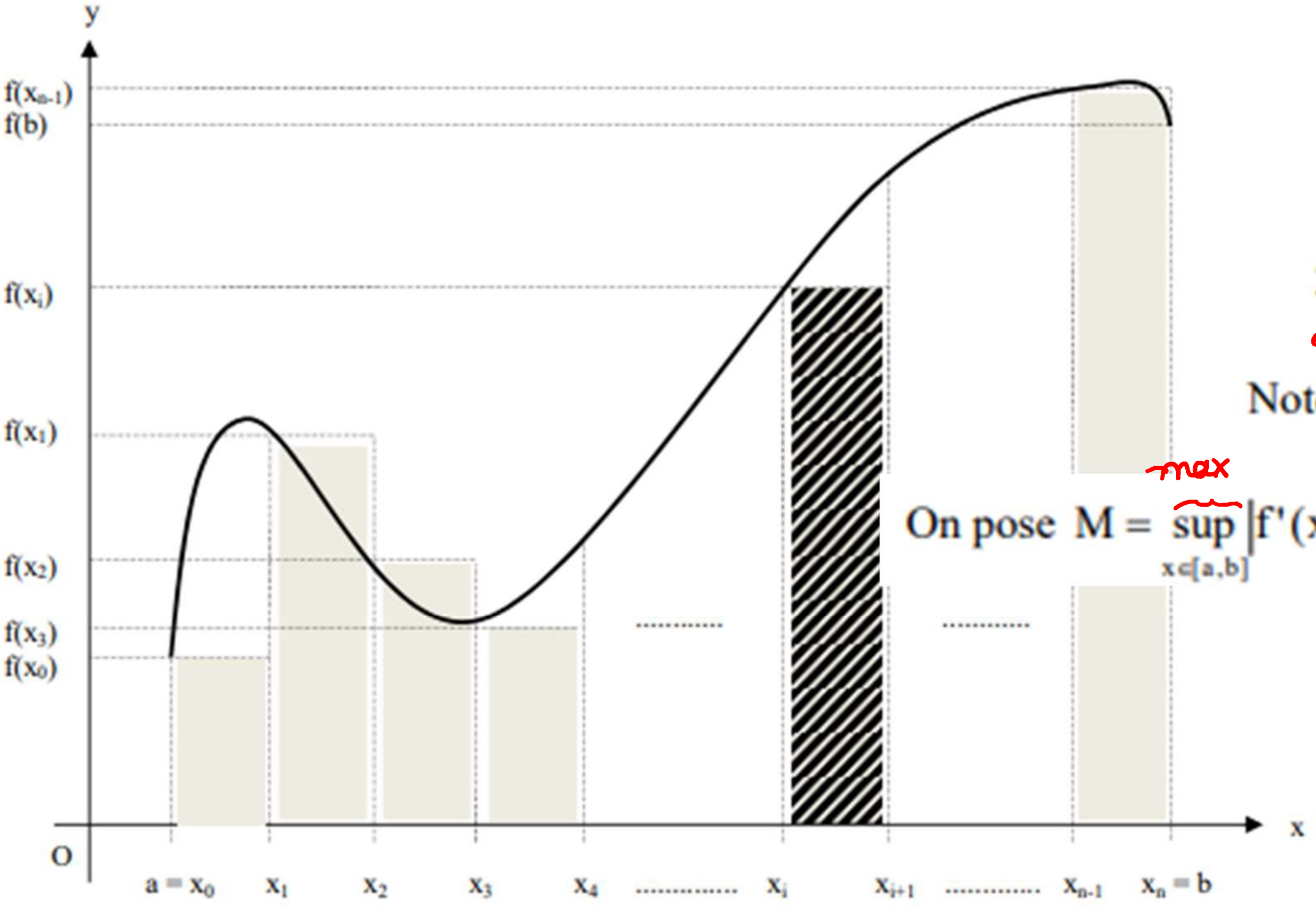
$= h.\left(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})\right)$

$I_R = h.\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ valeur approchée, $x_i = a+ih$

$I = \int_a^b f(x)\,dx$ val. exacte.

n intervalle de m̂ longueur $h = \frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)dx \approx h \times \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$$



Page 16 TD/TP OL

2) Evaluation de l'erreur

erreur

$$\text{Notons } \Delta = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I \text{ val. exacte}} - \underbrace{h.\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)}_{I_R \text{ val. approchée}}$$

erreur absolue.

max

$$\text{On pose } M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \text{, on admet qu'alors : } |\Delta| \leq M.\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h \times \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)dx \approx h \times \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)}$$

2) Evaluation de l'erreur

Notons $\Delta = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I} - \underbrace{h.\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)}_{I_R}$

On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, on admet qu'alors : $|\Delta| \leq M.\dfrac{(b-a)^2}{2n}$.

3) Application Déterminer le nombre de sous-intervalles n à partir duquel on pourra obtenir, à l'aide de la méthode des rectangles, une valeur approchée de $I = \int_{1=a}^{2=b} x^2 dx$ à 10^{-2} près. Puis, pour n=200, évaluer en utilisant un tableur et la méthode des rectangles une valeur approchée de I.

$*$ $I = \int_1^2 x^2 dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^2 = \dfrac{2^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3} = I$ valeur exacte

$*$ On résout $|\Delta| \leq M.\dfrac{(b-a)^2}{2n} \leq 10^{-2}$

$M = \sup_{x\in[1;2]} |f'(x)| = \sup_{[1;2]} |\underbrace{2x}_{=2x}| = 2\times2 = 4$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$\Leftrightarrow 4 \times \dfrac{(2-1)^2}{2n} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{n} \leq 10^{-2} \underset{\text{inverse}}{\Longleftrightarrow} \dfrac{n}{2} \geq 10^{2} \underset{\times 2>0}{\Longleftrightarrow} n \geq 200.$

Cc : A partir de n = 200, on obtient une valeur approchée de I à 10^{-2} près.

Notes

$$I = \int_{1 = a}^{2 = b} \underbrace{x^2}_{= f(x)}\,dx = \frac{7}{3} \quad \text{val. exacte}$$

$$I_R = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1 = 199} f(a+ih) \quad \text{val. approchée}$$

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	a	b	h	i	a+ih	f(a+ih)
2	200	1	2	=(b-a)/n	0	=a+i*h	=(a+ih)^2
					1	A$2+E2*D$2	
					2		
					⋮		
					199		
					200		

Val. exacte I	= 7/3
Val. app. I_R	= h * somme( )
erreur absolue	= abs(I-IR) ← $<10^{-2}$

Notes

a	b	n	h	i	a+ih	f(a+ih)
1	2	200	0,005	0	1	1
				1	1,005	1,010025
				2	1,01	1,0201
				3	1,015	1,030225
				4	1,02	1,0404
				5	1,025	1,050625
				6	1,03	1,0609
				7	1,035	1,071225
				8	1,04	1,0816
				9	1,045	1,092025
				10	1,05	1,1025
				11	1,055	1,113025
				12	1,06	1,1236
				13	1,065	1,134225
				14	1,07	1,1449

Val approché	IR	2,3258375
Val exacte	I	2,33333333
Erreur absolu	Delta	0,00749583

Avec 200 intervalles, on obtient la valeur de I approchée à 10^{-2} près, soit à 1 chiffre après la virgule : 2,3

Notes

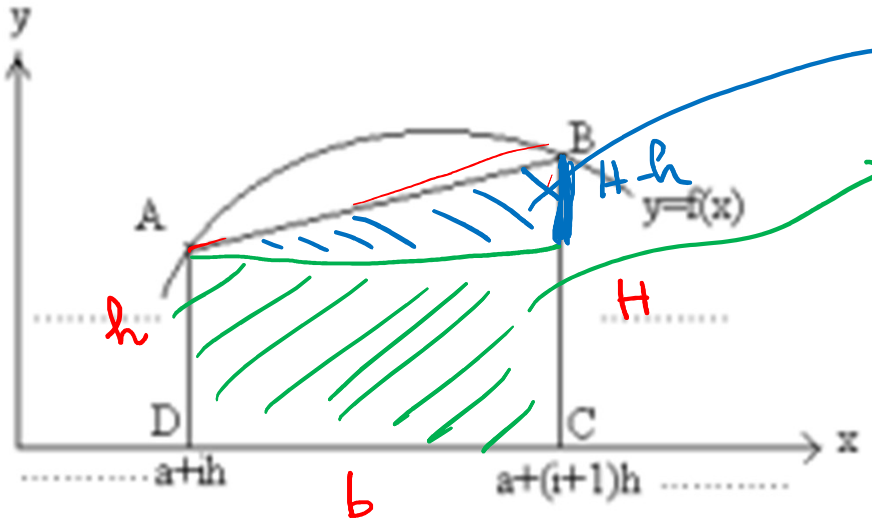
Page 17 TD/TP OL

II. Méthode des trapèzes :

1) Principe

Notes

Page 17 TD/TP OL

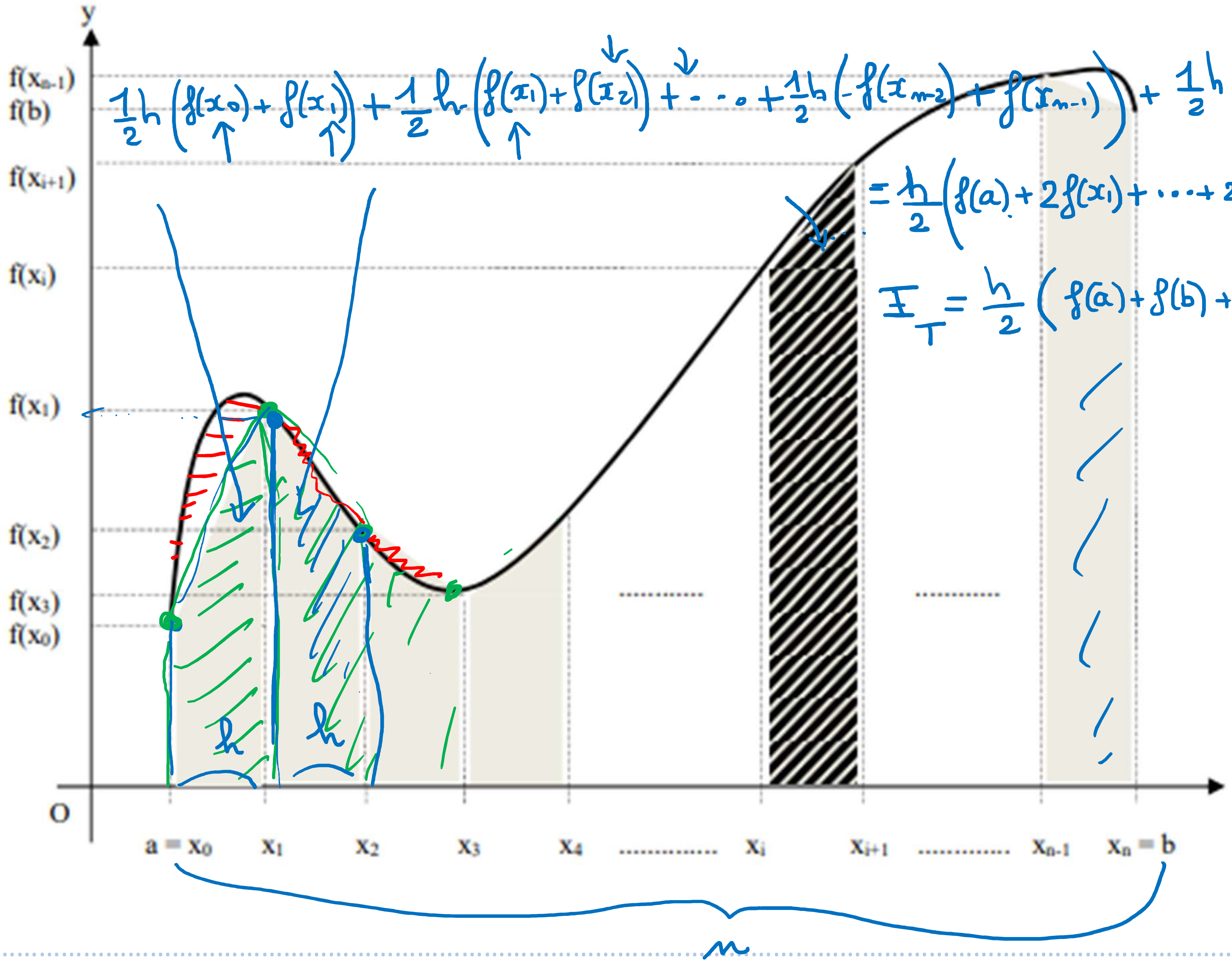


$= bh + \frac{1}{2}b(H - h)$

$= bh + \frac{1}{2}bH - \frac{1}{2}bh$

$= \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}bH$

L'aire d'un trapèze de base b, de petite hauteur h et de grande hauteur H est : $\frac{1}{2}b(h + H)$



Page 17 TD/TP OL

$$\frac{1}{2}h\left(f(x_0)+f(x_1)\right)+\frac{1}{2}h\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\dots+\frac{1}{2}h\left(f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right)+\frac{1}{2}h\left(f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

$$=\frac{h}{2}\left(f(a)+2f(x_1)+\dots+2f(x_{n-1})+f(b)\right)$$

$$I_T=\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)$$

$x_i \to a+ih.$

$$\frac{1}{2}b(h+H)$$

$$h=\frac{b-a}{n}$$

Notes

Page 17 TD/TP OL

On obtient alors : $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \times [f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)]$

2) Evaluation de l'erreur

Notons $\Delta = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I} - \underbrace{\frac{h}{2} \times [f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)]}_{I_T}$

On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, on admet qu'alors : $|\Delta| \le M.\frac{(b-a)^3}{12n^2}$.

Page 18 TD/TP OL

$M.\frac{(b-a)^2}{2n}.$

3) Application Déterminer le nombre de sous-intervalles n à partir duquel on pourra obtenir, à l'aide de la méthode des trapèzes, une valeur approchée de $I = \int_1^2 x^2 dx$ à 10^{-2} près. Puis, pour n=10, évaluer en utilisant un tableur et la méthode des trapèzes une valeur approchée de I.

* $I = \frac{7}{3} = \int_1^2 x^2 dx$

* On résout $|\Delta| \le M.\frac{(b-a)^3}{12n^2} \le 10^{-2}$

$M = \sup_{[1,2]} \overbrace{|f''(x)|}^{2} = 2.$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2$

$\Leftrightarrow 2.\frac{(2-1)^3}{12n^2} \le 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{6n^2} \le 10^{-2} \underset{\text{inverse} \searrow}{\Leftrightarrow} 6n^2 \ge 10^2 \underset{\div 6>0}{\Leftrightarrow} n^2 \ge \frac{50}{3} \underset{\sqrt{\ } \nearrow}{\Leftrightarrow} n \ge \sqrt{\frac{50}{3}} \simeq 4{,}08$

CC A partir de n=5 intervalles, on obtient I à 10^{-2} près.

Notes

Page 18 TD/TP OL

a	b	n	h	i	a+ih	f(a+ih)
1	2	10	0,1	0	1	1
				1	1,1	1,21
				2	1,2	1,44
				3	1,3	1,69
				4	1,4	1,96
				5	1,5	2,25
				6	1,6	2,56
				7	1,7	2,89
				8	1,8	3,24
				9	1,9	3,61
				10	2	4

Val approché IT	2,335
Val exacte I	2,33333333
Erreur absolu Delta	0,001[illegible]6[illegible]67

Avec 10 intervalles, on obtient la valeur de I approchée à 10^{-2} près, soit à un chiffre après la virgule : 2,3

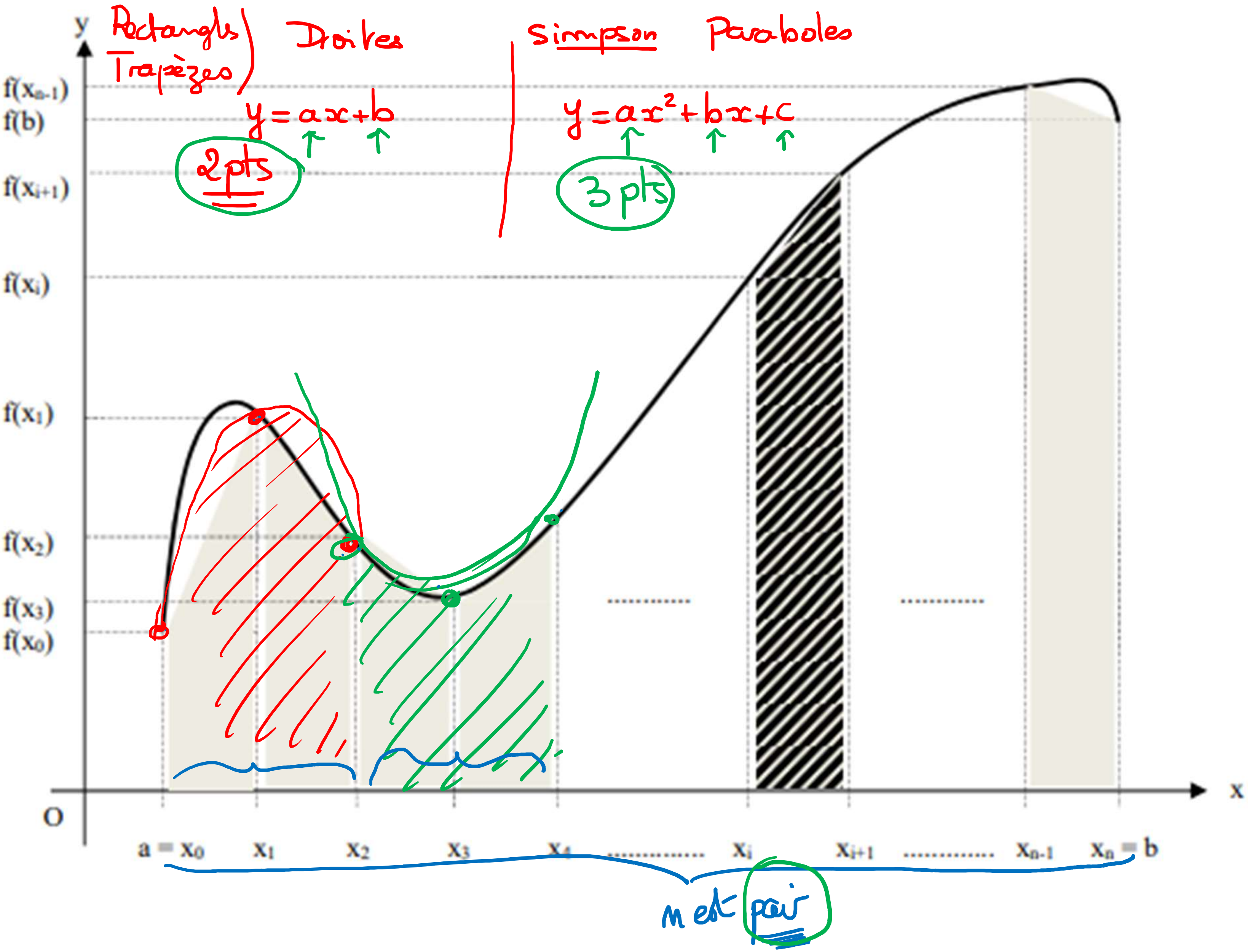
Notes

Page 19 TD/TP OL

III. Méthode de Simpson :

1) Principe

Dans la méthode de Simpson l'arc $M_{i-1}M_iM_{i+1}$ de la courbe est remplacé par l'arc de parabole (P) qui passe par les points M_{i-1}, M_i, M_{i+1} :



Page 17 TD/TP OL

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}\Bigg[f(a)+f(b)+\underbrace{4.\sum_{k=0}^{n/2-1} f(a+(\underbrace{2k+1}_{\text{impair}})h)}_{\text{somme des impairs}}+\underbrace{2.\sum_{k=1}^{n/2-1} f(a+\underbrace{2k}_{\text{pair}}h)}_{\text{somme des pairs}}\Bigg]$$

Page 19 TD/TP OL

$$= \frac{h}{3}\Bigg(f(a)+f(b)+4\Big(\underbrace{f(a+h)}_{k=0}+\underbrace{f(a+3h)}_{k=1}+\underbrace{f(a+5h)}_{k=2}+\dots+f(a+(n-1)h)\Big)+$$

$$2\Big(\underbrace{f(a+2h)}_{k=1}+\underbrace{f(a+4h)}_{k=2}+\dots+f(a+(n-2)h)\Big)\Bigg)$$

Page 20 TD/TP OL

2) Evaluation de l'erreur

Notons $\Delta = \int_a^b f(x)dx - S$

On pose $M = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$, on admet qu'alors : $|\Delta| \le M.\frac{(b-a)^5}{2880n^4}$

Exemple Pour n=10, évaluer en utilisant un tableur et la méthode de Simpson une valeur approchée de $I = \int_1^2 x^2dx$. Quelle est l'incertitude obtenue ?

Notes $I = \int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$ val. exacte

$$I_S = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4 \underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} f(a+(2k+1)h)}_{f(a+h)+\dots+f(a+(n-1)h)} + 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(a+2kh)}_{f(a+2h)+\dots+f(a+(n-2)h)} \right) \text{ val. app.}$$

$i=1$ IMPAIRS $i=9$ — $i=2$ PAIRS $i=8$

Pair!!

n	a	b	h
10	1	2	$=\frac{(b-a)}{n}$

i	$a+ih$	$f(a+ih)$	IMPAIRS	PAIRS
0	$=a+i.h$	$=f(a+0.h)$	$\emptyset$ (*)	$f(a)$ (**)
1	\$!!	$=f(a+1h)$	$f(a+h)$	$\emptyset$
⋮		$=f(a+2h)$	$\emptyset$	$f(a+2h)$
		$=f(a+3h)$	$f(a+3h)$	$\emptyset$
		⋮	⋮	
10		$f(a+10h)$	$\emptyset$	$\emptyset$
	Somme impairs		Σ	Σ ← Somme pairs

I exacte	
I_s approchée	
erreur abs	

(*) = Si(est.impair(i) ; f(a+ih) ; ∅)

(**) = Si(est.pair(i) ; f(a+ih) ; ∅)