I. Evaluation de $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$

$I = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$ val. exacte

Page 21 TD/TP OL

1) Evaluer au brouillon la valeur exacte de cette intégrale.

2) A l'aide du logiciel Excel, évaluer la valeur de l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ en utilisant les méthodes d'intégration numérique suivantes :

$\left(\ln|x| = \begin{cases} \ln x & \text{si } x>0 \\ \ln(-x) & \text{si } x<0 \end{cases}\right)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x>0 \\ \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & \text{si } x<0 \end{cases}$

- Méthode des rectangles, on déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-2} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=50. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul.

papier. excel.

- Méthode des trapèzes, on déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-4} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=20. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul.

papier. excel.

- Méthode de Simpson (on pourra se servir de la fonction EST.PAIR et EST.IMPAIR afin de distinguer les cas pairs et impairs). On déterminera au préalable le nombre de sous intervalles n, à partir duquel on pourra obtenir une valeur approchée de $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ à 10^{-4} près. Puis, on appliquera la méthode pour n=10. Evaluer alors, l'erreur commise sur l'estimation de l'intégrale en comparant le résultat obtenu avec la valeur exacte déterminée par calcul.

papier. excel.

Notes

1. $I = \int_{1 = a}^{2 = b} \underbrace{\frac{1}{x}}_{= f(x)} dx = \Big[\underbrace{\ln |x|}_{F(x)} \Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

$F(x)$ car $F'(x) = f(x)$ — valeur exacte

Page 21 TD/TP OL

2. Méthode des rectangles :

donné en DS

On cherche n tel que $|\Delta| < 10^{-2} \Longleftarrow (*)\ |\Delta| \leq M.\dfrac{(b-a)^2}{2n} \leq 10^{-2}$ où $M = \underset{[a,b]}{\operatorname{Sup}} |f'(x)|$ (max)

ici $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $a = 1$; $b = 2$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ $M = \underset{[1,2]}{\operatorname{Sup}} \dfrac{1}{x^2} = 1.$

$(*) \Longleftrightarrow |\Delta| \leq \dfrac{1}{2n} \leq 10^{-2} \Longleftrightarrow 2n \geq 10^2$

$\Longleftrightarrow \boxed{n \geq 50.}$

Méthode des rectangles						
a	1					
b	2					
h	0,02					
n	50			Valeur exacte		0,69314718
				valeur approchée		0,68817218
i	a+ih	f(a+ih)		incertitude absolue		0,004975
0	1	1				
1	1,02	0,98039216				
2	1,04	0,96153846				
3	1,06	0,94339623				
4	1,08	0,92592593				
5	1,1	0,90909091				
6	1,12	0,89285714				
7	1,14	0,87719298				
8	1,16	0,86206897				

$\simeq 0{,}69$ — 2 ch ap la virgule

$< 10^{-2}$

Méthode des trapèzes :

Notes

On cherche n tel que $|\Delta| \leq 10^{-4} \iff (*)\ |\Delta| \leq M.\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ où $M = \sup_{[1,2]} |f''(x)|$

Page 21 TD/TP OL

$f''(x) = \left(-x^{-2}\right)' = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow M = \sup_{[1,2]} \dfrac{2}{x^3} = 2.$

$(*) \iff |\Delta| \leq \dfrac{2}{12n^2} \leq 10^{-4} \iff 6n^2 \geq 10^4$

$\iff n^2 \geq \dfrac{10^4}{6}$

$\iff n \geq \dfrac{10^2}{\sqrt{6}} \simeq 40{,}8$

$\iff \underline{\underline{n \geq 41}}$

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	i	a+ih	f(a+ih)					
9	0	1	1					
10	1	1,05	0,95238095					
11	2	1,1	0,90909091					
12	3	1,15	0,86956522					
13	4	1,2	0,83333333		Valeur exacte		0,69314718	3 ch. ap. la virgule
14	5	1,25	0,8		valeur approchée		0,69330338	
15	6	1,3	0,76923077		incertitude absolue		0,0001562	$< 10^{-4}$
16	7	1,35	0,74074074					
17	8	1,4	0,71428571					
18	9	1,45	0,68965517					
19	10	1,5	0,66666667					
20	11	1,55	0,64516129					
21	12	1,6	0,625					
22	13	1,65	0,60606061					
23	14	1,7	0,58823529					
24	15	1,75	0,57142857					
25	16	1,8	0,55555556					
26	17	1,85	0,54054054					
27	18	1,9	0,52631579					
28	19	1,95	0,51282051					
29	20	2	0,5					

Notes

Méthode de Simpson:

Page 21 TD/TP OL

On cherche n tel que $|\Delta| \leq 10^{-4}$ $\Longleftrightarrow$ $|\Delta| \leq \dfrac{M(b-a)^5}{2880\, n^4}$ (*) où $M = \sup_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.

$f''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f^{(3)}(x) = -6x^{-4}$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$

$M = \sup_{[1,2]} |f^{(4)}(x)| = \sup_{[1,2]} |24x^{-5}| = 24$

(*) $\Longleftrightarrow |\Delta| \leq \dfrac{24}{2880 n^4} \leq 10^{-4}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2880 n^4}{24} \geq 10^{-4} \Longleftrightarrow n^4 \geq \dfrac{24 \cdot 10^4}{2880}$

$\Longleftrightarrow n \geq \sqrt[4]{\dfrac{24 \cdot 10^4}{2880}} \simeq 3{,}02$

$\boxed{n \geq 4}$

k	a+ih	f(a+ih)	test i pair	test i impair
0	1	1	1	0
1	1,1	0,90909091	0	0,90909091
2	1,2	0,83333333	0,83333333	0
3	1,3	0,76923077	0	0,76923077
4	1,4	0,71428571	0,71428571	0
5	1,5	0,66666667	0	0,66666667
6	1,6	0,625	0,625	0
7	1,7	0,58823529	0	0,58823529
8	1,8	0,55555556	0,55555556	0
9	1,9	0,52631579	0	0,52631579
10	2	0,5	0,5	0
		Valeur exacte		0,69314718
		valeur approchée		0,69315023
		incertitude absolue		3,0501E-06