

Exercice 6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto f(x) = \text{Arctan} x + \text{Arctan} \frac{1}{x}$
 Calculer $f'(x)$ puis en déduire l'expression de $f(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$

$$* \quad (\text{Arctan } u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{x'}{1+x^2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0. \quad \text{Donc } f \text{ est une constante.}$$

$$* \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = cte = \text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x}. \quad \text{Si } \underline{x=1}: f(1) = cte = 2 \text{Arctan } 1 = \frac{2\pi}{4}$$

$$+ \quad \forall x \in \mathbb{R}^{-*}, f(x) = cte = \text{Arctan } x + \text{Arctan} \frac{1}{x}. \quad \text{Si } \underline{x=-1}: f(-1) = cte = \frac{\pi}{2} = 2 \text{Arctan}(-1) = \frac{-2\pi}{4}$$

$$\underline{cc} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$