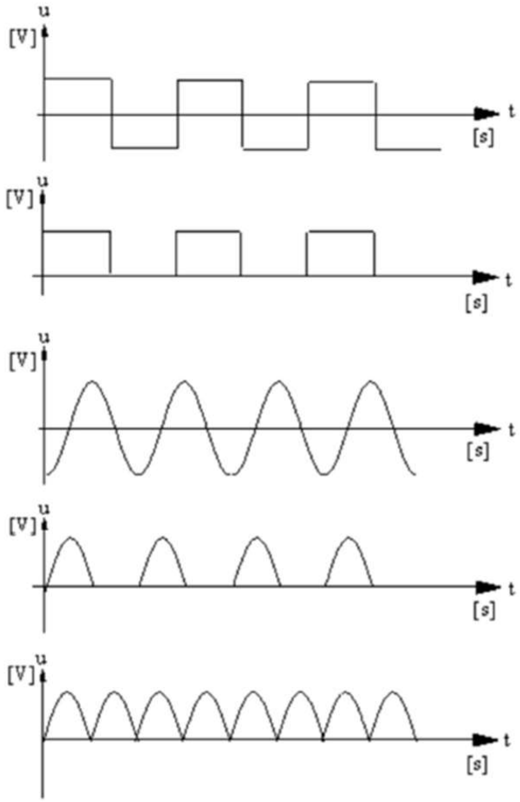
Correction Annales du DS2
Semestre 1

Correction du DM10

Chapitre 4 : Les bases du calcul intégral pour le GEII



signal	U_m	U_{eff}
carré symétrique	0	U_{max}
carré positif	$\frac{U_{max}}{2}$	$\frac{U_{max}}{2}$
alternatif sinusoïdal	0	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$
pulsé redressement simple alternance	$\frac{U_{max}}{p}$	$\frac{U_{max}}{2}$
pulsé redressement double alternance	$\frac{2 \times U_{max}}{p}$	$\frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$

Ex1

1) $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ (FI)

Méthode de l'expression conjuguée :

$$\frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x+x^2} - 1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2} + 1\right)}$$

$$= \frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \frac{x^2+x}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}$$

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \dfrac{1}{2}$

2) $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{x^2-8x+16}{x^2-16} = \frac{"0"}{0}$

Méthode 1 : $x^2-8x+16 = (x-4)^2$

et $x^2-16 = (x-4)(x+4)$

Donc

$$f(x) = \frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{x+4}$$

et $\displaystyle\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{0}{8} = 0.$

Méthode 2 : A l'aide de la règle de l'Hospital

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{(x^2-8x+16)'}{(x^2-16)'} = \lim_{x \to 4} \frac{2x-8}{2x}$$

$$= \frac{8-8}{8} = 0.$$

3.a) A l'aide de la méthode de l'expression conjuguée, déterminer la limite : $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{5x^2}$ $=$ "$\frac{0}{0}$" FI

$$\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{5x^2} \times \frac{\sqrt{1+3x^2}+1}{\sqrt{1+3x^2}+1} = \frac{\sqrt{1+3x^2}^2-1^2}{5x^2\left(\sqrt{1+3x^2}+1\right)} = \frac{1+3x^2-1}{5x^2\left(\sqrt{1+3x^2}+1\right)} = \frac{3\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+3x^2}+1\right)}$$

donc $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{5\left(\sqrt{1+3x^2}+1\right)} = \frac{3}{5\times 2} = \frac{3}{10}$

3.b) Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'Hospital

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+3x^2}-1\right)'}{(5x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}}}{10x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x}}{10\cancel{x}.\sqrt{1+3x^2}} = \frac{3}{10}$$

3.c) Retrouver ce résultat en utilisant la méthode des équivalents (on cherchera d'abord un équivalent de $\sqrt{1+X}$ en 0).

$f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x f'(0)$ ici : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc $\sqrt{1+X} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{1}{2}X$ (*)

On cherche un équivalent de $\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{5x^2}$ en 0.

En posant $X = 3x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ dans (*), on obtient :

$$\sqrt{1+3x^2} \underset{0}{\sim} 1 + \frac{1}{2} \cdot 3x^2$$

Ainsi : $\sqrt{1+3x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{3}{2} x^2$ et $\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{5x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{3}{2}\cancel{x^2}}{5\cancel{x^2}}$

et $L = \dfrac{3}{10}$

Ex2 : $X(\omega) = \left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)^2$

① $X(\omega)$ existe si et seulement si $\omega \neq 0$

donc : $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}^*$

② $X(-\omega) = \left(-\omega - \frac{1}{-9\omega}\right)^2 = \left(-\omega + \frac{1}{9\omega}\right)^2$

$= \left(-\left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)\right)^2 = \left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)^2$

$X(-\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \neq 0.$

X est donc paire. Sa courbe est donc symétrique par rapport à (Oy) et on l'étudie sur $]0;+\infty[$.

③ $x'(w) = 2v'v$ où $v = w - \frac{1}{9w}$

alors $v' = 1 - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{w}\right)' = 1 + \frac{1}{9w^2}$

Ainsi $x'(w) = \underbrace{2\left(1 + \frac{1}{9w^2}\right)}_{>0}\left(w - \frac{1}{9w}\right)$ $\forall w \neq 0$

④

Signe de $x'(w)$ sur $]0, +\infty[$:

$x'(w)$ est du signe de $w - \frac{1}{9w}$

$w - \frac{1}{9w} \geq 0 \iff \frac{9w^2 - 1}{9w} \geq 0$ (*)

Comme $w > 0$, alors (*) $\iff 9w^2 - 1 \geq 0$

$\iff 9w^2 \geq 1$

$\iff w^2 \geq \frac{1}{9}$

$\iff w \geq \frac{1}{3}$ car $\boxed{w > 0}$

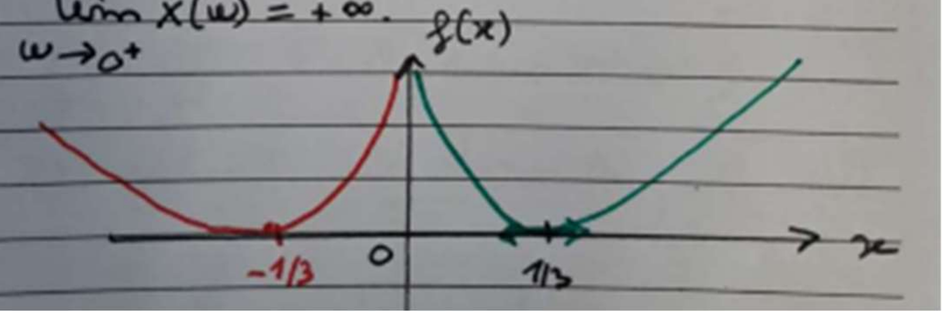
w	0		$1/3$		$+\infty$
$x'(w)$	‖	$-$	0	$+$	
X	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{w \to 0^+} X(w) = \lim_{w \to 0^+} \left(w - \frac{1}{9w}\right)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$X\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9 \cdot \frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$\lim_{w \to +\infty} X(w) = \lim_{w \to +\infty} \left(w - \frac{1}{9w}\right)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$$

Remarque: La courbe représentant X admet une tangente horizontale en $\frac{1}{3}$ car $X'(1/3) = 0$ et une asymptote verticale d'équation $x = 0$, car $\lim_{w \to 0^+} X(w) = +\infty$.



(5) $X(w) = \left(w - \frac{1}{9w}\right)^2 = \frac{64}{81} \iff w - \frac{1}{9w} = \frac{8}{9}$ ou $w - \frac{1}{9w} = -\frac{8}{9}$

$\iff \frac{9w^2-1}{9w} = \frac{8}{9}$ ou $-\frac{8}{9}$

$\iff 81w^2 - 9 = 72w$ ou $81w^2 - 9 = -72w$

$\iff 81w^2 - 72w - 9 = 0$ ou $81w^2 + 72w - 9 = 0$

$\iff 9(9w^2 - 8w - 1) = 0$ ou $9(9w^2 + 8w - 1) = 0$

$\iff 9w^2 - 8w - 1 = 0$ ou $9w^2 + 8w - 1 = 0$

$\Delta = 64 + 36 = 100$

$\begin{cases} w_1 = \frac{8+10}{18} = 1 \\ w_2 = \frac{8-10}{18} = -\frac{1}{9} \end{cases}$

$\Delta = 100$

$\begin{cases} w_1 = \frac{-8+10}{18} = +\frac{1}{9} \\ w_2 = \frac{-8-10}{18} = -1 \end{cases}$

Conclusion : X n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$ car $y = \frac{64}{81}$ admet 4 antécédents sur $\mathbb{R}$:

1 ; $-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}$ et -1.

⑥ $$X : [0;1/3] \longrightarrow [0;+\infty[$$
$$\omega \longmapsto y = X(\omega) = \left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)^2$$

X est continue et strictement décroissante sur $[0;1/3]$, donc d'après le théorème de monotonie X est donc bijective sur $[0;1/3]$ et admet une fonction réciproque :

$$X^{-1} : [0;+\infty[\longrightarrow (0;1/3]$$

$$y \longmapsto \omega / \ y = \left(\omega - \frac{1}{9\omega}\right)^2.$$

Ex3

① * $I(x) = \frac{8x^4}{4} - 5\frac{x^2}{2} + 2x + cte$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $I(x) = 2x^4 - \frac{5x^2}{2} + 2x + cte$

* $J(\theta) = \int 3.\cos(5\theta)\,d\theta = \frac{3}{5}.\int 5\cos(5\theta)\,d\theta$

$\int u'\cos u\,d\theta = \sin u + cte$

ici $u = 5\theta \Rightarrow u' = 5$

$J(\theta) = \frac{3}{5}.\sin(5\theta) + cte$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$

* $k(t) = \frac{2}{4}\int \frac{4t^3 + t}{2\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}}\,dt$

$\int \frac{u'}{2\sqrt{u}}\,dt = \sqrt{u} + cte$

ici $u = t^4 + 2t^2 + 1 \Rightarrow u' = 4t^3 + 4t$

$u' = 4(t^3 + t)$

$k(t) = \frac{1}{2}.\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} + cte$

$\forall t \in \mathbb{R}$

(en effet $t^4 + 2t^2 + 1 > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$).

② * $L = \int_{-2}^{-1} \frac{3}{t}\,dt = 3.\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t}\,dt$

$L = 3.\left[\ln|t|\right]_{-2}^{-1} = 3(\ln 1 - \ln 2)$

$L = -3\ln 2.$

* $M = \int_{-\pi}^{\pi} x^3.\cos(7x)\,dx$

$[-\pi;\pi]$ est un intervalle centré en 0

$x \mapsto x^3$ est impaire
$x \mapsto \cos(7x)$ est paire
donc

$x \mapsto x^3.\cos(7x)$ est impaire.

Alors $M = 0$.

……………………………………………………………………

$$* \quad N = \int_0^1 t.\sqrt{e^{-t^2}}\,dt$$

$$N = \int_0^1 t.\left(e^{-t^2}\right)^{1/2} dt$$

$$N = -\int_0^1 -t.\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$\int u' e^u\, dt = e^u + cte$$

ici $u = -t^2/2 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}.2t = -t$

$$N = -\left[e^{-t^2/2}\right]_0^1 = -\left(e^{-1/2} - e^0\right)$$

$$N = 1 - e^{-1/2}$$