

Exercices de soutien

Préparation DS2 semestre 1

Ensembles de définition, Calcul de limites, de dérivées, études de fonctions,
fonctions réciproques, calcul intégral

Ensembles de définition

Enoncés

1 DÉFINITIONS DE FONCTIONS

Déterminer sous forme d'une réunion d'intervalles, l'ensemble de définition des fonctions définies ci-dessous :

$$1) f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(2x+3)}$$

$$2) g(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

$$3) h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 7}$$

$$4) i(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$5) j(x) = \ln|x|$$

$$6) k(x) = \sqrt{x^2 + x + 7}$$

$$7) l(x) = \sqrt{x+1}$$

$$8) f_1(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$9) g_1(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$10) h_1(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x > 3 \\ e^x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$11) i_1(x) = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } i \text{ est paire}$$

$$12) j_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ensembles de définition

Corrigés

1) f est définie sur

$$\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{3}{2}; 2\right[\cup]2; +\infty[$$

2) $x^2 - 3x + 2 = 0$ implique $x = 2$ ou $x = 1$.
L'ensemble de définition exclut ces nombres.

$$]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$$

3) Pour tout x , $x^4 + x^2 + 7$ est positif. h est définie sur $]-\infty; +\infty[$

4) On doit avoir $x - 1 > 0$.

Dans ce cas, $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x - 1} \sqrt{x + 1}$
et il faut aussi que $x + 1$ soit positif ou nul.

$$\text{et } x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

L'intervalle $]1; +\infty[$ réalise ces 2 conditions.

5) On exclut seulement $x = 0$:

$$]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

6) Le discriminant de $x^2 + x + 7$ est négatif. Ce polynôme est positif pour toute valeur de x . La fonction k est définie sur $]-\infty; +\infty[$

$$7)]-1; +\infty[$$

$$8)]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

9) $[1; 2] \cup [3; +\infty[$ obtenu par un tableau de signes.

10) h_1 est définie pour tout nombre différent de 3.

11) i_1 est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

12) j_1 est définie sur $\mathbb{R}$.

Calcul de limites

Enoncés

12 Limites à l'infini des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x^5 + 2x^3 - 7x + 1}{5x^6 + 4x + 1}$ en $\pm\infty$

b) $g(x) = \sqrt{2x^5 - 1} - \sqrt{x^7 + 3x^2 - 4}$ en $+\infty$

c) $h(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{5x^3 - x}}$ en $+\infty$

13 Étudier la limite quand $x \rightarrow 4$ de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1}}{x-4} \quad (\text{expression conjuguée})$$

16 En utilisant **L'Hospital a) et b) et** calculer les limites suivantes : **Us équivalents pour c)**

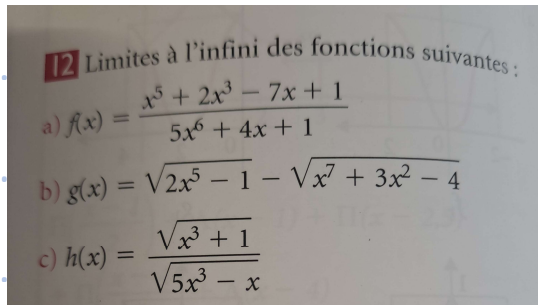
a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sqrt{1+x} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

Calcul de limites

Corrigés



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ (FI) $f(x) \sim \frac{x^5}{5x^6} = \frac{1}{5x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ (FI) $f(x) \sim \frac{1}{5x}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty - \infty$ (FI)

$g(x) = \sqrt{2x^5 - 1} - \sqrt{x^7 + 3x^2 - 4} = (2x^5 - 1)^{1/2} - (x^7 + 3x^2 - 4)^{1/2} \sim -x^{7/2}$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{\infty}{\infty}$ (FI) $h(x) \sim \frac{x^{3/2}}{(5x^3)^{1/2}} = \frac{x^{3/2}}{5^{1/2} x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Calcul de limites

Corrigés

13 Étudier la limite quand $x \rightarrow 4$ de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1}}{x-4}$$

SOLUTION

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1}}{x-4}$$

On a $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x+5} = 9$ et $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 9$

et $\lim_{x \rightarrow 4} x - 4 = 0$

Donc on ne peut pas déterminer directement le comportement de $g(x)$ car on obtient une forme

« $\frac{0}{0}$ »

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1})}{(x-4)(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1})}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+5) - (2x+1)}{(x-4)(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1})}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-x+4}{(x-4)(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1})}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1})}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1})}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \frac{-1}{(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+1})} = \frac{-1}{3+3} \\ &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Calcul de limites

Corrigés

16 En utilisant des calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sqrt{1+x} - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

} L'Hospital

} équivalents

a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ (FI)

D'après la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x - e^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{1} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{0}{0}$ (FI)

D'après la règle de l'Hospital : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{ax} - e^{bx})'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - be^{bx}}{1} = a - b$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{0}{0}$ (FI)

$e^x \sim 1+x$; $\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x$ et $\sin x \sim x$

Donc $h(x) \sim \frac{(1+x)(1+\frac{1}{2}x) - 1}{x} = \frac{x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{3}{2}$

Calcul de dérivées

Enoncés

17 Calculer les dérivées de fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x^2 - 7x + 1$

b) $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$

c) $h(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$

d) $j(x) = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 2x^2}$

e) $k(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

f) $l(x) = \ln |x|$

Calcul de dérivées

Corrigés

SOLUTION

a) $f(x) = 4x^2 - 7x + 1$ donne $f'(x) = 8x - 7$

b) $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$: Pour x différent de -1 , g est de la forme $\frac{u}{v} \Rightarrow g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = -1$ et $v' = 1$

$$g'(x) = \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}$$

$$\text{et } g'(x) = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

c) $h(x) = \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$

h est de la forme $u^n \Rightarrow h' = n u^{n-1} u'$ avec

$$u' = \frac{(x-2) - (x+2)}{(x-2)^2}$$

$$h'(x) = 2 \left(\frac{x+2}{x-2}\right) \left(\frac{(x-2) - (x+2)}{(x-2)^2}\right)$$

$$h'(x) = 2 \left(\frac{x+2}{x-2}\right) \left(\frac{-4}{(x-2)^2}\right)$$

$$h'(x) = \frac{-8(x+2)}{(x-2)^3}$$

d) $j(x) = \sqrt{x^4 - 3x^3 + 2x^2}$

j est de la forme $\sqrt{u} \Rightarrow j' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec

$$u' = 4x^3 - 9x^2 + 4x$$

$$j'(x) = \frac{4x^3 - 9x^2 + 4x}{2\sqrt{x^4 - 3x^3 + 2x^2}}$$

e) $k'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

k' n'est pas définie en 0

f) $l(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

d'où :

$$l'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \left(\text{forme } \frac{u'}{u} \right)$$

soit $l'(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$

Etude de fonctions

Enoncés

18 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

19 Trouver les tangentes aux graphes des fonctions suivantes aux intersections avec (Ox)

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

c) $h(x) = x^3 - x$

21 1) Étude de la fonction $g(x) = \frac{1}{\ln |x|}$

(en particulier, parité, limites, asymptotes, prolongement par continuité)

2) En déduire la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\ln |x+1|}$

Etude de fonctions

Corrigés

18 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

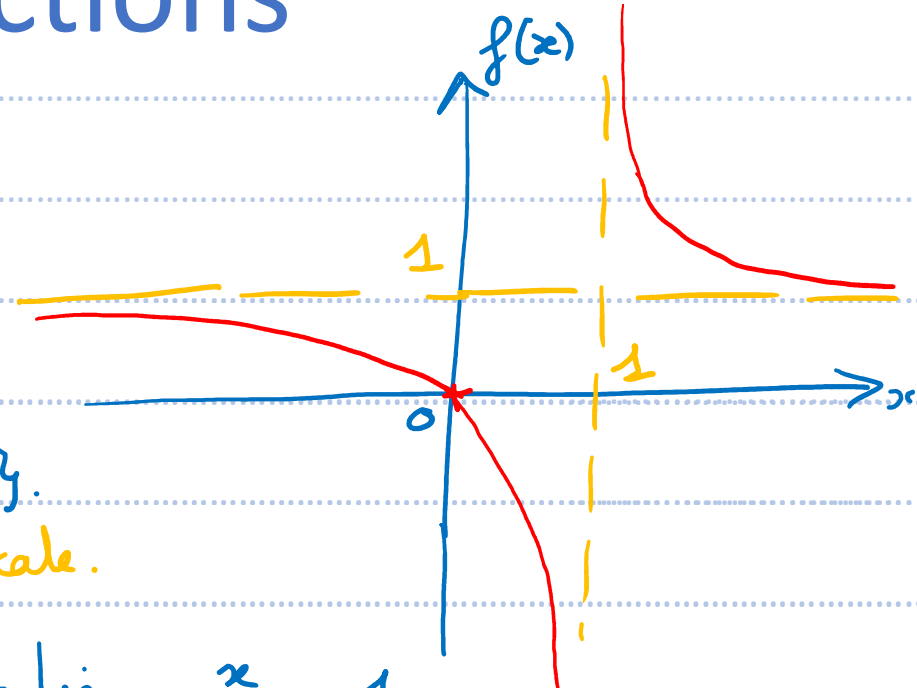
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

asymptote d'équation $x=1 \Rightarrow$ verticale.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
f	1	$+\infty$	1

asymptote d'équation $y=1 \Rightarrow$ horizontale



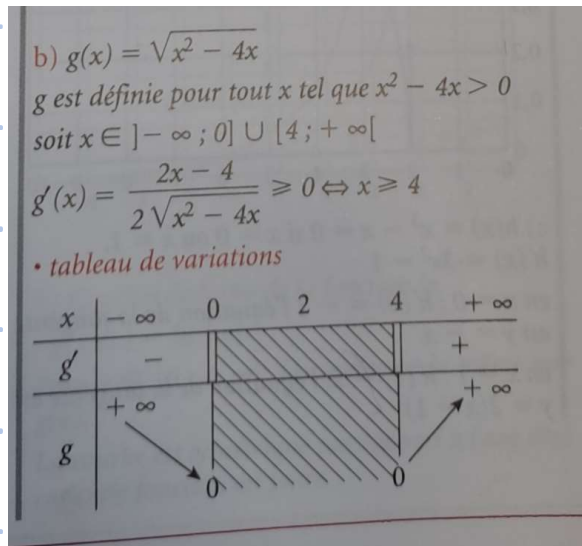
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

$x < 1 \Rightarrow x-1 < 0$; $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0$

Etude de fonctions

Corrigés



pas d'asymptote verticale ou horizontale
 pas de tangente horizontale ($g'(x) \neq 0$)

Etude de fonctions

Corrigés

19 Trouver les tangentes aux graphes des fonctions suivantes aux intersections avec (Ox)

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$

c) $h(x) = x^3 - x$

SOLUTION

a) $f(x) = x^2$: Intersection avec l'axe des x $(0; 0)$
 $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est tangente.

b) $g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ coupe l'axe des x en $x = 2$

mais n'est pas dérivable en $x = 2$



c) $h(x) = x^3 - x = 0$ si $x = 0$ ou $x = 1$.

$h'(x) = 3x^2 - 1$

en $x = 0$: $h'(0) = -1$ l'équation de la tangente est $y = -x$

en $x = 1$: $h'(1) = 2$, l'équation de la tangente est $y = 2(x - 1)$

Etude de fonctions

Corrigés

21 1) Étude de la fonction $g(x) = \frac{1}{\ln |x|}$

(en particulier, parité, limites, asymptotes, prolongement par continuité)

2) En déduire la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\ln |x + 1|}$

SOLUTION

1) Étude de la fonction $g(x) = \frac{1}{\ln |x|}$

- Ensemble de définition : $\mathbb{R}^* - \{1\}$
- $g(x) = g(-x)$, c'est une fonction paire, l'étude peut se faire sur $]0; +\infty[$
- La fonction $\ln$ est croissante, donc $\frac{1}{\ln(x)}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ en 0 donc, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x)} \right] = 0$
quand x tend vers 0. On peut prolonger la fonction g par continuité en 0 en décidant que $g(0) = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, ce qui se traduit par la présence d'une asymptote qui est ici l'axe des abscisses.

• $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \infty$, la droite $x = 1$ est asymptote.

Fonctions réciproques

Enoncés

25 a) Étudier la fonction f définie par
 $f(x) = x + e^x$

b) Démontrer que f admet une réciproque f^{-1}
dont on tracera la courbe.

c) Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}'(1)$. En déduire l'équa-
tion de la tangente à la courbe de f^{-1} au point
d'abscisse 1.

26 Résolution de l'équation $x + \cos x = 0$

1) Démontrer que la fonction $f(x) = x + \cos x$
est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En déduire l'existence d'une fonction réciproque
et le nombre de solutions de l'équation

$$x + \cos x = 0$$

2) Tracer les courbes de la fonction f et de sa réci-
proque.

3) Écrire un programme qui calcule la solution
de l'équation à 0,01 près.

Fonctions réciproques

Notes

- 25** a) Étudier la fonction f définie par $f(x) = x + e^x$
 b) Démontrer que f admet une réciproque f^{-1} dont on tracera la courbe.
 c) Calculer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}'(1)$. En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 1.

Corrigés

SOLUTION

a) Étude de f :

- définie sur $\mathbb{R}$
- continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions continues et dérivables)
- strictement croissante sur $\mathbb{R}$: en effet,
 $f'(x) = 1 + e^x > 0 \forall x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x) = -\infty$

Nous pouvons rechercher d'éventuelles asymptotes obliques :

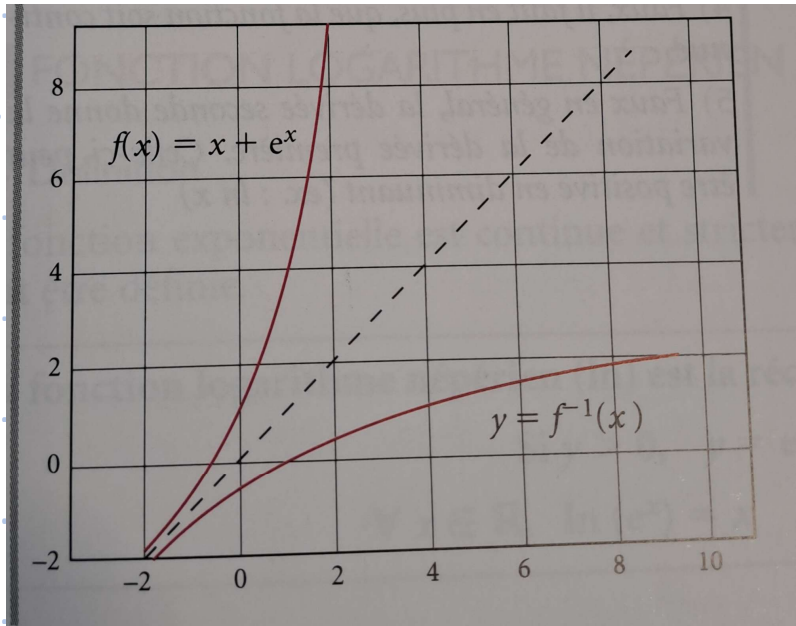
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{x} \right) = +\infty \text{ de ce côté,}$$

il n'y a rien

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0 : \text{la droite}$$

d'équation $y = x$ est asymptote à $-\infty$.

b) Puisque f est strictement monotone et continue sur $\mathbb{R}$, alors f admet une réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$



c) $x = f^{-1}(1) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x + e^x = 1$
 $x = 0$ vérifie $0 + e^0 = 1$ donc $0 = f^{-1}(1)$

$$f^{-1}'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

$$f'(x) = 1 + e^x \text{ et } f^{-1}(1) = 0$$

$$\text{d'où : } f'(f^{-1}(1)) = f'(0) = 2$$

$$\text{et } f^{-1}'(1) = \frac{1}{2}$$

L'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} en $(1, 0)$ est :

$$y = \frac{1}{2}(x - 1)$$

Fonctions réciproques

Corrigés

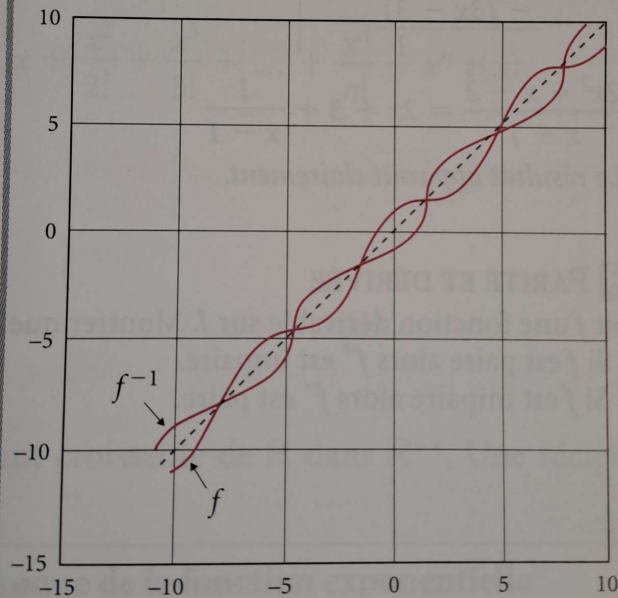
SOLUTION

1)

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions continues.
- $f'(x) = 1 - \sin x$. $f'(x) \geq 0$ car $1 \geq \sin x$ donc la fonction f est strictement croissante.
- De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ pour $x \rightarrow -\infty$

La fonction f qui est continue et strictement monotone est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) Courbes



3) Résolution approchée de l'équation :

$x + \cos x = 0$ par dichotomie

$a = -1$;

$b = 1$;

26 Résolution de l'équation $x + \cos x = 0$

1) Démontrer que la fonction $f(x) = x + \cos x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En déduire l'existence d'une fonction réciproque et le nombre de solutions de l'équation $x + \cos x = 0$

2) Tracer les courbes de la fonction f et de sa réciproque.

3) Écrire un programme qui calcule la solution de l'équation à 0,01 près.

```
y = a + cos(a);  
while abs(y) > 0.01,  
  x = (a + b)/2;  
  y = x + cos(x);  
  if y > 0  
    b = x;  
  else a = x;  
end  
end  
x  
y
```

2 CALCULS D'INTÉGRALES PAR RECHERCHE D'UNE PRIMITIVE

Calculer les intégrales :

a) $\int_0^2 (x - 3) dx$

b) $\int_{-1}^1 (3x^2 - 2x + 1) dx$

c) $\int_{-2}^2 (x^3 - 3) dx$

d) $\int_1^2 \frac{3}{x^2} dx$

e) $\int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x} dx$

f) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

g) $\int_0^{\pi/2} 2 \sin x dx$

h) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$

i) $\int_1^2 \frac{2}{x} dx$

j) $\int_0^3 \frac{dx}{(3x+2)^2}$

k) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-1}$

l) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

m) $\int_0^1 2e^{3x} dx$

n) $\int_1^2 e^{-x} dx$

o) $\int_0^{\pi/2} \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) dt$

p) $\int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t dt$

q) $\int_0^{\pi/2} (\sin t + \sin 2t) dt$

r) $\int_0^{\pi/3} \cos 3t \cos 5t dt$

s) $\int_0^{\pi/4} \sin 2t \sin 5t dt$

t) $\int_0^{\pi/3} \sin t \cos 5t dt$

Calcul d'intégrales

Enoncés

pas au programme du DS

Notes

Calcul d'intégrales

Corrigés

SOLUTION

$$\text{a) } \int_0^2 (x - 3) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^2 = -4$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-1}^1 (3x^2 - 2x + 1) dx &= \left[x^3 - x^2 + x \right]_{-1}^1 \\ &= 1 - (-3) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{-2}^2 (x^3 - 3) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - 3x \right]_{-2}^2 \\ &= -2 - 10 = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_1^2 \frac{3}{x^2} dx &= -3 \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -3 \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 \\ &= -3 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x} dx &= \int_1^2 \left(\frac{x}{1} - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln x \right]_1^2 \\ &= 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 \\ &= \frac{3}{2} - \ln 2 \end{aligned}$$

$$f) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = 2 \int_0^2 \frac{dx}{2\sqrt{x+2}} = 2 \left[\sqrt{x+2} \right]_0^2 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{2}) = 2(2 - \sqrt{2})$$

$$g) \int_0^{\pi/2} 2 \sin x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -2 \left[\cos x \right]_0^{\pi/2} = -2 \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 2$$

$$h) \int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} \left[\cos 2x \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{1}{2} (-1 - 1) = 1$$

$$i) \int_1^2 \frac{2}{x} \, dx = 2 \left[\ln x \right]_1^2 = 2 \ln 2$$

$$j) \int_0^3 \frac{dx}{(3x+2)^2} = -\frac{1}{3} \int_0^3 \frac{-3 \, dx}{(3x+2)^2} = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{3x+2} \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{22}$$

$$k) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-1} = \left[\ln |x-1| \right]_{-2}^{-1} = \ln 2 - \ln 3$$

$$k) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x-1} = \left[\ln |x-1| \right]_{-2}^{-1} = \ln 2 - \ln 3$$

$$l) \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$m) \int_0^1 2e^{3x} \, dx = 2 \int_0^1 e^{3x} \, dx = \frac{2}{3} \left[e^{3x} \right]_0^1 = \frac{2}{3} (e^3 - 1)$$

$$n) \int_1^2 e^{-x} \, dx = - \int_1^2 -e^{-x} \, dx = - \left[e^{-x} \right]_1^2 = - (e^{-2} - e^{-1}) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$$

$$o) \int_0^{\pi/2} \cos \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) dt = \frac{1}{3} \left[\sin \left(3t + \frac{\pi}{4} \right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} \left(\sin \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{3} \left(\sin \frac{7\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

p) Forme $u'u^n$ avec $u = \sin t$, $n = 2$, primitive $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$ ce qui donne :

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t \, dt = \frac{1}{3} \left[\sin^3 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

$$q) \int_0^{\pi/2} (\sin t + \sin 2t) \, dt = - \left[\cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\pi/2} = - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = 2$$

pas du programme du DS.

r) On transforme un produit de deux cosinus en une somme de cosinus par la formule :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)],$$

d'où le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \cos 3t \cos 5t \, dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (\cos 8t + \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{8} \sin 8t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \sin \frac{8\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

s) Même type de calculs que précédemment, on trouve :

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2t \sin 5t \, dt = \frac{5\sqrt{2}}{42}$$

t) On transforme un produit en somme et on trouve :

$$\int_0^{\pi/3} \sin t \cos 5t \, dt = -\frac{3}{16}$$