

Corrigé Tableaux Blancs 3

Exercice 1 ($\cong 2,5$ points). Considérons D le domaine du plan défini par :

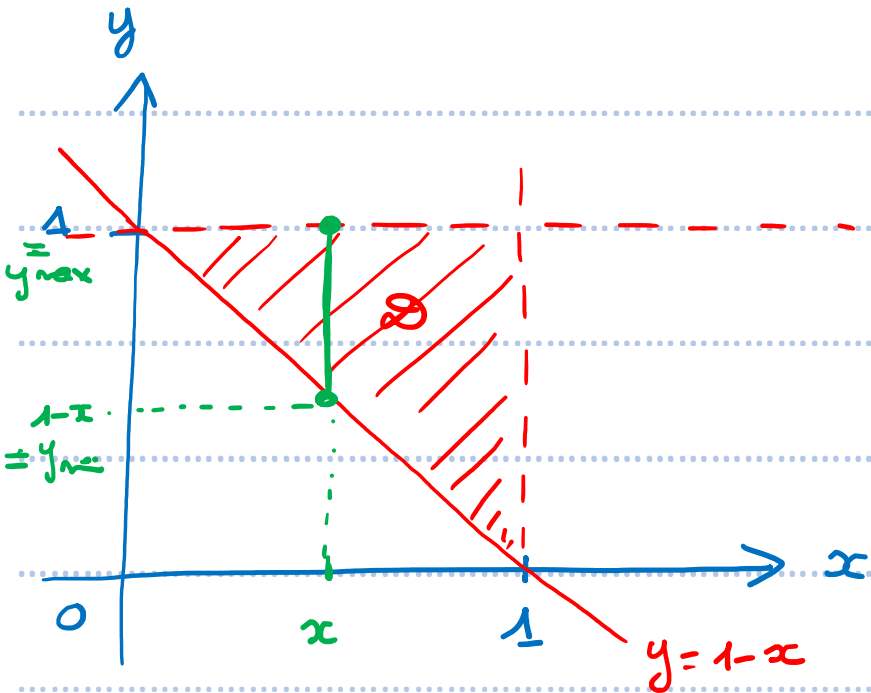
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}.$$

$$y \geq 1 - x.$$

1. Représenter le domaine D dans un repère orthonormé du plan.

2. Calculer $I = \iint_D (x + y) dx dy$

①



$$\textcircled{2} \quad I = \int_0^1 \int_{1-x}^1 (x+y) dy dx$$

$$I = \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^2}{2} \right]_{1-x}^1 dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 ((x+1)^2 - 1) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(x+1)^3}{3} - x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} - 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Exercice 2 ($\simeq 3, 5$ points). Considérons D le domaine du plan défini par :

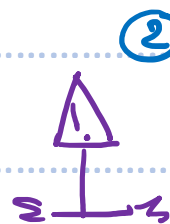
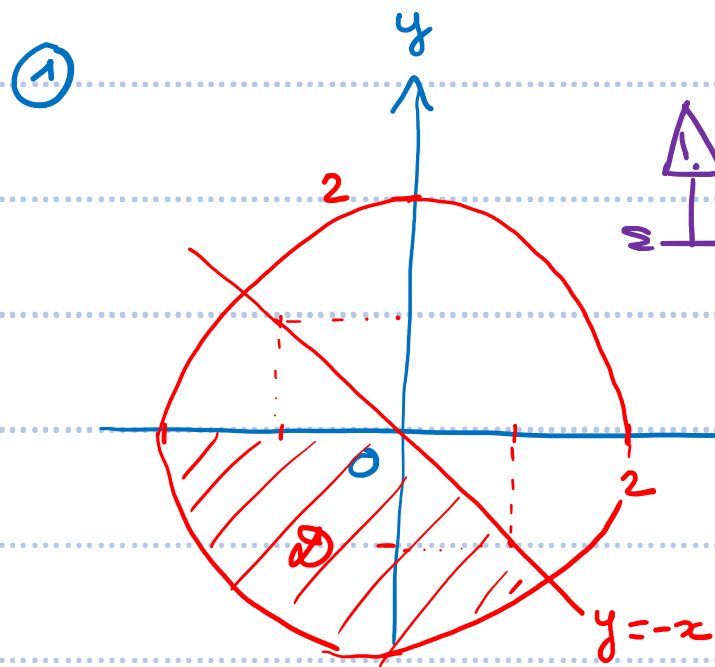
Notes.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0 ; x + y \leq 0 ; x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

1. Représenter le domaine D dans un repère orthonormé du plan (tracé à justifier). 2

2. Calculer

$$J = \iint_D (x + y)^2 dx dy.$$



passage en polaires :

$$\begin{cases} r > 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$0 \leq r \leq 2$$

$$y = r \sin \theta$$

$$\pi \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$$

$r^3 (\cos \theta + \sin \theta)^2$ et à variables séparables

$$J = \int \int_{\Delta} (r \cos \theta + r \sin \theta)^2 r dr d\theta$$

$\Delta \leftarrow$ rectangle

$$J = \int_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} (\underbrace{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}_{1 + 2 \cos \theta \sin \theta}) d\theta \times \int_0^2 r^3 dr$$

$$J = \left[\theta + \sin^2 \theta \right]_{\pi}^{\frac{7\pi}{4}} \times \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \left(\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2} - (\pi + 0) \right) \times 4 = 3\pi + 2$$

Exercice 3 ($\cong 3,5$ points). Considérons D le domaine du plan défini par :

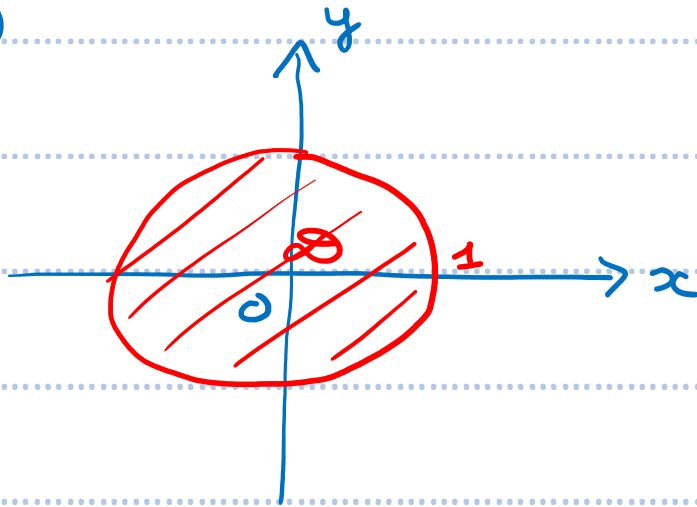
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

disque de centre 0 et de rayon 1.

1. Représenter le domaine D dans un repère orthonormé du plan.

2. Calculer $K = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$

①



② Passage en Polaire : $r \in [0; 1]$ et $\theta \in [0; 2\pi[$.

$$K = \iint_{\Delta} \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta$$

à variables séparables
 $\Delta \leftarrow$ rectangle

$$K = \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr \times \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\ln(1+r^2) \right]_0^1 \times 2\pi$$

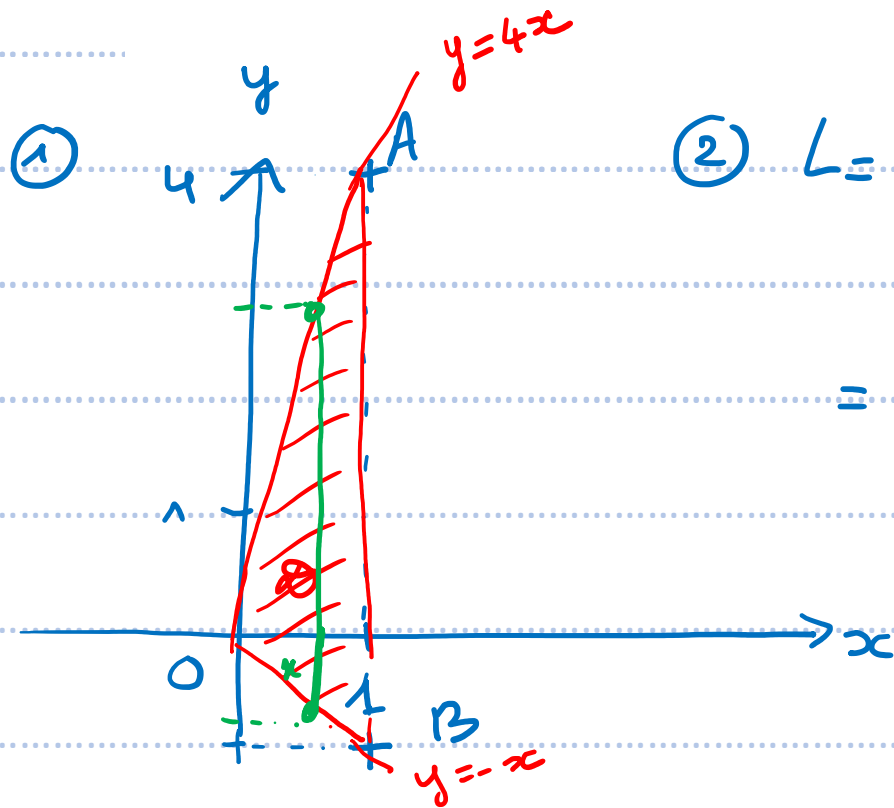
$$K = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) \times 2\pi = \pi \cdot \ln 2.$$

Exercice 4 ($\simeq 4$ points). Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère les deux points dont les coordonnées sont les suivantes :

$$A(1; 4) \quad ; \quad B(1; -1).$$

On note D l'intérieur du triangle OAB .

1. Représenter le domaine D dans un repère orthonormé du plan.
2. Calculer



②

$$L = \iint_D \frac{x(x+2)}{(xy+4)^2} dx dy.$$

$$L = \int_0^1 \int_{-x}^{4x} \frac{x(x+2)}{(xy+4)^2} dy dx$$

$\int \frac{u'}{u^2} dy = -\frac{1}{u} + C$
 où $u = xy+4$
 et $u'_y = x$

$$= \int_0^1 \cancel{x(x+2)} \cdot \left[-\frac{1}{xy+4} \times \frac{1}{\cancel{x}} \right]_{-x}^{4x} dx$$

$\frac{x+2}{4(x^2+1)} + \frac{\cancel{x+2}}{(2-x)(2+x)}$

$$= \int_0^1 (x+2) \cdot \left(-\frac{1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4-x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{x}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{x-2} \right) dx$$

Notes

$$L = \left[-\frac{1}{8} \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \operatorname{arctan} x - \ln|x-2| \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{2} \overbrace{\operatorname{arctan}(1)}^{\frac{\pi}{4}} - \cancel{\ln 1}^0 - \left(-\frac{1}{8} \cancel{\ln 1}^0 - \frac{1}{2} \cancel{\operatorname{arctan} 0}^0 - \ln(2) \right)$$

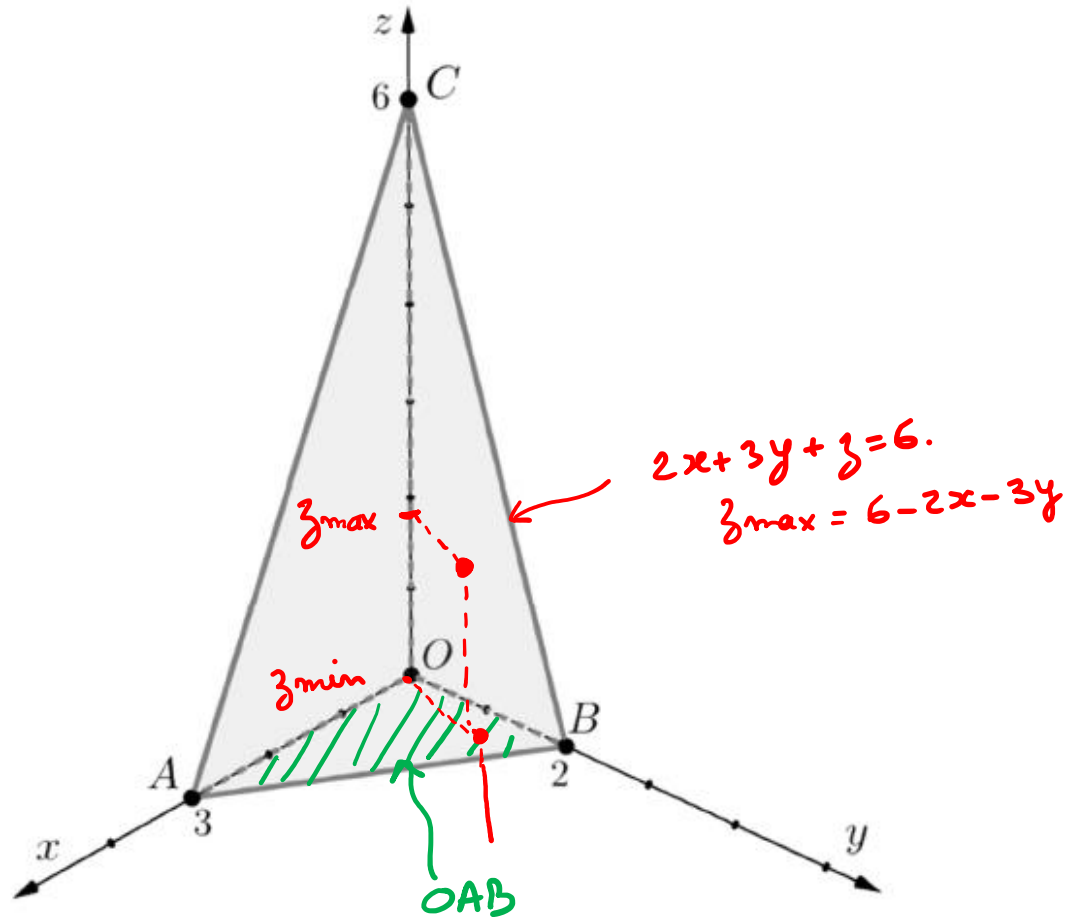
$$= -\frac{1}{8} \ln 2 + \ln 2 - \frac{\pi}{8}$$

$$L = \frac{7 \ln 2 - \pi}{8}$$

Exercice 5 ($\simeq 4,5$ points). Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les trois points dont les coordonnées sont les suivantes :

$$A(3; 0; 0) \quad ; \quad B(0; 2; 0) \quad ; \quad C(0; 0; 6).$$

On note Ω la région de l'espace correspondant à l'ensemble des points situés à l'intérieur du tétraèdre de sommets O, A, B, C .



Calculer $M = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$.

Indication. Si besoin, on pourra utiliser (sans avoir à le démontrer) le résultat suivant : une équation du plan (ABC) est $2x + 3y + z = 6$.

Equation du plan

$$(P): ax + by + cz = d$$

$$\begin{cases} 3a = d \\ 2b = d \\ 6c = d \end{cases}$$

$$\frac{d}{3}x + \frac{d}{2}y + \frac{d}{6}z = d$$

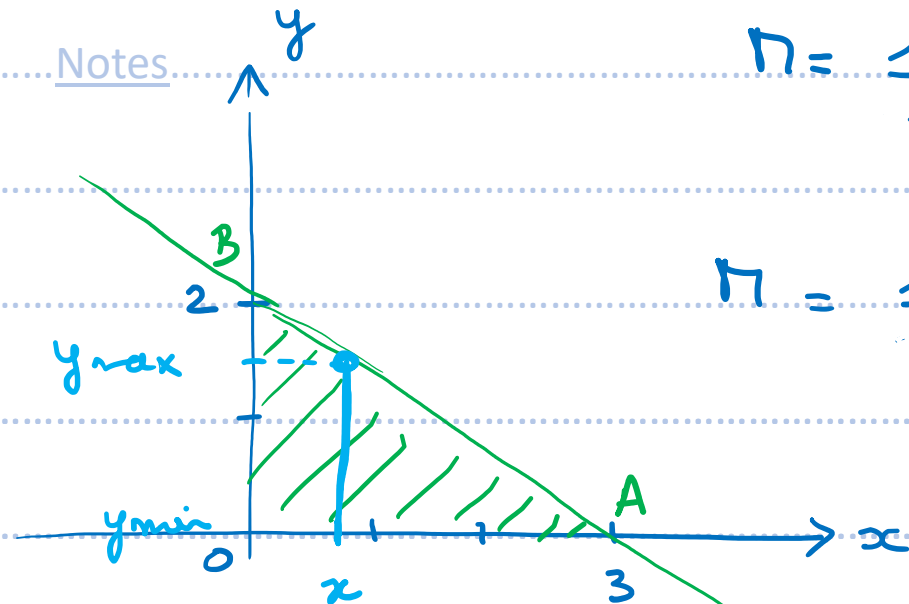
On choisit $d = 6$ et on obtient :

$$2x + 3y + z = 6.$$

$$M = \iint_{OAB} \int_0^{6-2x-3y} z^2 dz dx dy$$

$$M = \iint_{OAB} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{6-2x-3y} dx dy = \frac{1}{3} \iint_{OAB} (6-2x-3y)^3 dx dy$$

Notes



$$I = \frac{1}{3} \int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}x} (6-2x-3y)^3 dy dx$$

$$\int u'_y u^x dy = \frac{u^{x+1}}{x+1} + C$$

$$u = 6-2x-3y$$

$$\Rightarrow u'_y = -3$$

$$I = \frac{1}{3} \int_0^3 -\frac{1}{3} \left[\frac{(6-2x-3y)^4}{4} \right]_0^{2-\frac{2}{3}x} dx$$

$$2x+3y=6 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(6-2x) = 2 - \frac{2}{3}x$$

$$\int u'_x u^x dx = \frac{u^{x+1}}{x+1} + C$$

$$I = -\frac{1}{36} \int_0^3 \left(\underbrace{(6-2x-6+2x)}_0^4 - (6-2x)^4 \right) dx = \frac{1}{36} \times \frac{1}{-2} \left[\frac{(6-2x)^5}{5} \right]_0^3$$

$$I = -\frac{1}{360} (0 - 6^5) = \frac{6^5}{360} = \frac{2^5 \times 3^5}{3^2 \times 2^3 \times 5} = \frac{2^2 \times 3^3}{5} = \frac{4 \times 27}{5} = \frac{108}{5}$$

$$72 \times 5 = 360 = 9 \times 4 \times 2 \times 5$$

Exercice 6 ($\cong 4$ points). Considérons f la fonction définie par : $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
2. Quels sont les points critiques de f ?
3. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f .
4. Quelle est la nature des points critiques de f ?

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y + 3 \end{cases} \quad \textcircled{2} \quad \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - 2x \Leftrightarrow y = -2 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \\ x - 4 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases} \\ & \text{il y a donc un seul point critique} = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad H = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \text{ de plus, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \text{ ainsi } \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right) \text{ est un minimum local.}$$