Test2 de R1.04 Nom :............................ Prénom : .... ALT

Exercice 1 Compléter **en ligne** les zones en pointillés : **(4 pts)**
(la colonne 1 est un cas particulier de la colonne 2 : U est une fonction qui dépend de x)

Primitives de $\cos(x)$: sin x + cte	Primitives de $U'.\cos(U)$: sin U + cte
Primitives de $1+tan^2(x)$: tan x + cte $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$	Primitives de $U'(1+\tan^2 U)$ tan U + cte
Primitives de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$: $\sqrt{x}$ + cte x>0	Primitives de $\frac{U'}{2\sqrt{U}}$: $\sqrt{U}$ + cte
Primitives de $\frac{1}{1+x^2}$: arctan x + cte	Primitives de $\frac{U'}{1+U^2}$: arctan U + cte

Exercice 2 Déterminer la valeur exacte de chaque intégrale suivante. **(8.5 pts)**

$\mathrm{I}=\int_0^1 (t^3-2t)\mathrm{dt}$

$= \left[\frac{t^4}{4} - t^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{4} - 1$

$I = -\frac{3}{4}$

$\mathrm{J}=\int_{-1}^1 (t^3+t)^{17}\mathrm{dt}$

$t \xrightarrow{f} (t^3+t)^{17}$ est impaire car $f(-t) = ((-t)^3 - t)^{17} = (-t^3-t)^{17} = (-1)^{17}(t^3+t)$
donc $f(-t) = -f(t)$. Comme f est intégrée sur un intervalle centré en 0, alors $J = 0$.

$\mathrm{K}=\int_4^9 \frac{2}{\sqrt{t}}\mathrm{dt}$

$L = \int_1^2 \frac{5}{t^3}\,dt$

$L = 5\int_1^2 t^{-3}\,dt = 5\left[\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^2 = -\frac{5}{2}\left(\underbrace{2^{-2}}_{=\frac{1}{4}} - 1\right)$

$L = -\frac{5}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)$

$L = \frac{15}{8}$

$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(4t)\,dt$

$t \overset{f}{\longmapsto} \sin^3(4t)$ est $\frac{2\pi}{4}$ – périodique ; et l'intégrale a pour intervalle $[0, \pi/2]$ de longueur la période de f. Alors

$M = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^3(4t)\,dt = 0$ car f est aussi impaire

Exercice 3 Déterminer la valeur exacte de chaque intégrale suivante, en précisant, lorsque cela est demandé, dans chaque encadré la formule entière de primitive utilisée et les expressions de U et U' **(7.5 pts)**

$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4(x^3+1)}{x^4+4x+1}\,dx$

Formule : $\int \frac{U'}{U}\,dx = \ln|U| + c^{te}$

U = $x^4 + 4x + 1$ ⇒ U' = $4x^3 + 4$

$I = \frac{1}{4}\left[\ln|x^4+4x+1|\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\ln 6 - \ln 1\right) = \frac{\ln 6}{4}.$

$K = \int_4^9 \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt = 4\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = 4\left[\sqrt{t}\right]_4^9$

$K = 4(3-2) = 4.$

$J = \int_0^{\sqrt{2}} t.e^{-t^2}\,dt$

Formule : $\int U'e^U\,dt = e^U + c^{te}$

U = $-t^2$ ⇒ U' = $-2t$

$J = -\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}} -2t\,e^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{2}}$

$= -\frac{1}{2}\left(e^{-2} - 1\right)$

$J = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2}\right)$

$K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\,dx$

Formule : $\int \frac{U'}{U}\,dx = \ln|U| + c^{te}$

U = $\sin(2x)$ ⇒ U' = $2\cos(2x)$

$K = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/8} \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln|\sin(2x)|\right]_0^{\pi/8}$

$= \frac{1}{2}\left(\ln\sin(\pi/4) - \underbrace{\ln(\sin 0)}_{}\right)$

impossible car ln 0 n'existe pas.