

Exercice 1 : Calcul de limites (4.5 pts)

1) Soit $f(x) = \frac{7x^5 - 8x^2 - 5x + 3}{-5x^2 + 1}$

a) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$, puis en déduire sa limite en $+\infty$:

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{7x^5}{-5x^2} = -\frac{7}{5}x^3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{7}{5}x^3 = -\infty$$

b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $-\infty$, puis en déduire sa limite en $-\infty$:

$$f(x) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{7}{5}x^3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{7}{5}x^3 = +\infty$$

2)

a) Déterminer, en le justifiant, un équivalent de $\sin X$ en 0 .

On sait que $f(x) \underset{0}{\sim} f(0) + x f'(0)$ donc $\sin x \underset{0}{\sim} \sin 0 + x \cos 0$

Ainsi $\sin x \underset{0}{\sim} x$.

b) En déduire un équivalent en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin(4x) \cdot (3x + 5x^3)^2}{(x^2 - 2x)^3}$

$\sin(4x) \underset{0}{\sim} 4x$ d'après a), alors $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{4x \times (3x)^2}{(-2x)^3}$

$$f(x) \underset{0}{\sim} \frac{4x \times 9x^2}{-8x^3} = \frac{4 \times 9}{-8} = -\frac{9}{2}$$

c) Quelle est alors la valeur de la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 ?

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{9}{2}$$

Exercice 2 Fonctions (8 pts)

Soit g , la fonction définie par : $g(t) = \frac{t}{t^2 - \omega^2}$ où ω est une constante strictement positive.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de g :

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{\pm \omega\}$ car $g(t)$ existe si et seulement si $t^2 - \omega^2 \neq 0$
 et $t^2 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \omega^2 \Leftrightarrow t = \pm \omega$.

- 2) Etudier en le justifiant la parité de la fonction g .

$$g(-t) = \frac{-t}{(-t)^2 - \omega^2} = \frac{-t}{t^2 - \omega^2} = -g(t) \quad \forall t \neq \pm \omega$$

g est donc impaire.

- 3) Déterminer la fonction dérivée de g :

$$g'(t) = \frac{t'(t^2 - \omega^2) - t(t^2 - \omega^2)'}{(t^2 - \omega^2)^2} = \frac{t^2 - \omega^2 - t(2t)}{(t^2 - \omega^2)^2} = \frac{t^2 - \omega^2 - 2t^2}{(t^2 - \omega^2)^2}$$

$$g'(t) = \frac{-\omega^2 - t^2}{(t^2 - \omega^2)^2} \quad \forall t \neq \pm \omega$$

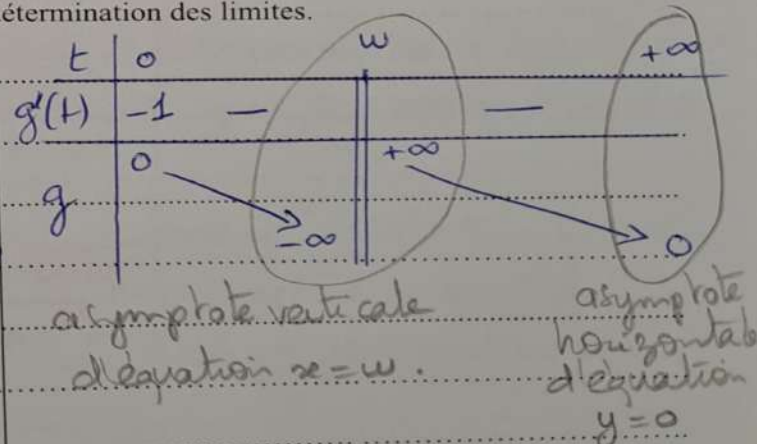
- 4) Construire le tableau de variations de g sur l'ensemble des valeurs positives de son ensemble de définition, en justifiant le signe de la dérivée, et la détermination des limites.

$$t \in [0; \omega[\cup]\omega; +\infty[$$

$$g'(t) = \frac{-(\omega^2 + t^2)}{(t^2 - \omega^2)^2} < 0 \quad \forall t \in \mathcal{D}_g$$

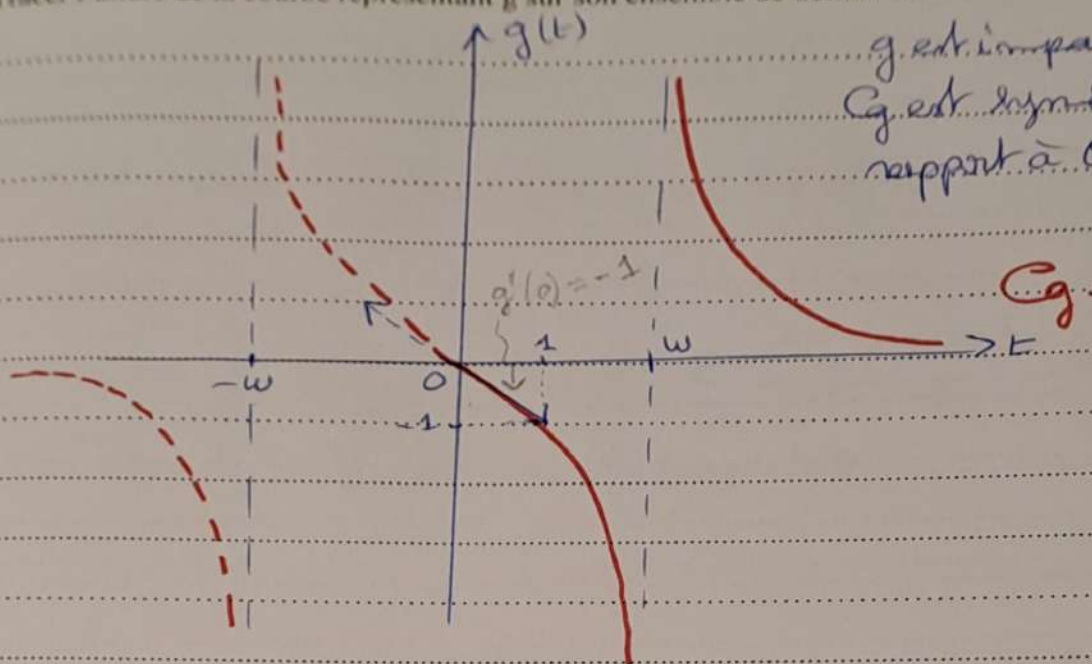
$$\bullet \lim_{t \rightarrow \omega^-} g(t) = \lim_{\substack{t \leq \omega \\ t \rightarrow \omega}} \frac{t}{t^2 - \omega^2} = \frac{\omega}{0^-} = -\infty$$

$$\text{Dernière} \lim_{t \rightarrow \omega^+} g(t) = \frac{\omega}{0^+} = +\infty$$



$$\bullet \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t^2} = 0 \quad \text{car } g(t) \sim \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t}$$

5) Tracer l'allure de la courbe représentant g sur son ensemble de définition.



g est impaire, donc C_g est symétrique par rapport à O .

6) Montrer que g est bijective sur l'intervalle $]w, +\infty[$ puis déterminer l'expression de sa fonction réciproque avec ses ensembles de définition et image. (on pourra utiliser les formules permettant de résoudre un polynôme du second degré).

D'après le théorème de monotonie, g est continue et strictement décroissante sur $]w, +\infty[$, elle est donc bijective sur $]w, +\infty[$.
 g admet alors une fonction réciproque g^{-1} .

$$g:]w, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

$$t \mapsto y = g(t) = \frac{t}{t^2 - w^2}$$

Expression de $g^{-1}(y) = \begin{cases} t > w \\ y > 0 \end{cases}$
 $y = \frac{t}{t^2 - w^2} \Leftrightarrow y(t^2 - w^2) = t$

Donc:

$$g^{-1}:]0, +\infty[\rightarrow]w, +\infty[$$

$$y \mapsto t = g^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^2w^2}}{2y}$$

$$\begin{aligned} &(\Leftrightarrow yt^2 - yw^2 = t) \\ &(\Leftrightarrow yt^2 - t = yw^2) \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4y^2w^2}}{2y} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{1 + 4y^2w^2}}{2y} < 0 \text{ car } y > 0 \end{cases}$$

et $\sqrt{1 + 4y^2w^2} > 1$.
 donc $1 - \sqrt{1 + 4y^2w^2} < 0$.

$$\Leftrightarrow yt^2 - t - yw^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4y^2w^2 > 0 \quad \forall y$$

Exercice 3 : Calcul Intégral – Simplifier les expressions – pas de valeurs approchées. (6 pts)

1) Déterminer et simplifier si possible les primitives suivantes :

$$I(x) = \int \left(7x^5 - \frac{3}{x} + 8 \right) dx = \frac{7x^6}{6} - 3 \ln|x| + 8x + C$$

$$J(t) = \int 5 \cdot (3t+6)^7 dt = 5 \cdot \frac{1}{3} \int 3(3t+6)^7 dt = \frac{5}{3} \frac{(3t+6)^8}{8} + C = \frac{5(3t+6)^8}{24} + C$$

car : $\int u' u^7 dt = \frac{u^8}{8} + C$ où $u = 3t+6 \Rightarrow u' = 3$

$$K(r) = \int \frac{7r^3}{3r^4+5} dr = 7 \cdot \frac{1}{12} \int \frac{12r^3}{3r^4+5} dr = \frac{7}{12} \ln|3r^4+5| + C$$

car : $\int \frac{u'}{u} dr = \ln|u| + C$ où $u = 3r^4+5 \Rightarrow u' = 12r^3$

2) Calculer les intégrales suivantes :

$$L = \int_{-1/3}^0 e^{3t+1} dt = \frac{1}{3} \int_{-1/3}^0 3e^{3t+1} dt = \frac{1}{3} \left[e^{3t+1} \right]_{-1/3}^0$$

car : $\int u' e^u dt = e^u + C$ où $u = 3t+1 \Rightarrow u' = 3$

$$L = \frac{1}{3} (e^1 - e^0) = \frac{1}{3} (e - 1)$$

$$M = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \quad \text{car } \theta \mapsto \cos(\theta) \text{ est}$$

une fonction paire sur $[-\pi/2, \pi/2]$, centrée en 0.

$$\text{donc } M = \frac{2}{\pi} \left[\sin(\theta) \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - \pi \quad \text{donc } \sin \frac{\pi}{2} = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1$$

$$\text{et } M = -\frac{2}{\pi}$$

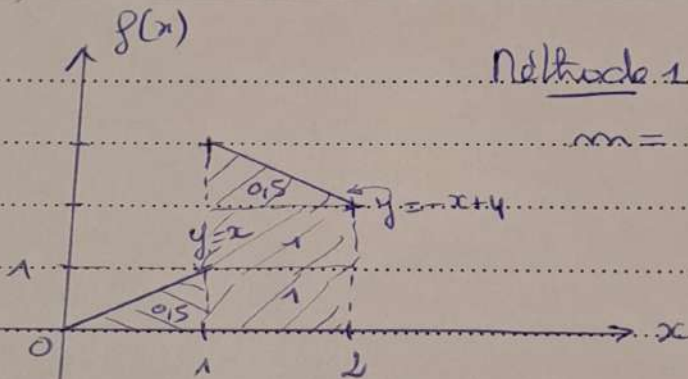
Exercice 4 : Valeur moyenne (1,5 pts)

Soit f , le signal 2-périodique, défini par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x + 4 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Calculer la valeur moyenne de f .

Rappel : La valeur moyenne d'un signal f , T -périodique est égale à : $m = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$



Méthode 1 : graphique

$$m = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Méthode 2 : Calcul intégral et Chasles :

$$m = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \underbrace{f(x)}_x dx + \int_1^2 \underbrace{f(x)}_{-x+4} dx \right\}$$

$$m = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 4x \right]_1^2 \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{-4}{2} + 8 - \left(-\frac{1}{2} + 4 \right) \right)$$

$$m = \frac{1}{2} (1 - 2 + 8 - 4) = \frac{3}{2}$$