# Chapitre 6 EDLCC du premier et du second ordre

**Circuit RLC :**

$q$ est la charge du condensateur, $C$ la capacité et $L$ l'inductance de la bobine.

On a : $i = \frac{dq}{dt}$, $u_{MN} = \frac{q}{C}$ et $u_{NM} = L\frac{di}{dt} + Ri = -\frac{q}{C}$ donc $q$ vérifie l'équation différentielle :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ ou encore } \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0}$$

avec les notations : $\lambda = \frac{L}{2R}$ constante d'amortissement, et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre du circuit.

**Freinage d'un disque :**

La vitesse angulaire d'un disque, notée $v$, vérifie : $\boxed{v'' = kv}$

**Mouvement d'un pendule de torsion :**

Moment d'inertie $J$, élongation angulaire $\theta$, constante de torsion $C$, couple de freinage $-B\frac{d\theta}{dt}$.

$\theta$ vérifie : $\boxed{J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0}$

**Mouvement d'un ressort :**

Objet de masse $m$ accroché à un ressort de masse négligeable. $k$ raideur du ressort.

$x(t)$ longueur du ressort à l'instant $t$. $x$ vérifie : $\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0}$.

**Mouvement d'un pendule pesant :**

$$J\alpha'' + mga\sin(\alpha) = 0$$

Lorsque les oscillations sont de faible amplitude, c'est-à-dire $\alpha$ « petit », on remplace $\sin(\alpha)$ par $\alpha$ et l'équation devient alors : $\boxed{J\alpha'' + mga \times \alpha = 0}$

# Partie A : EDLCC du premier ordre

Page 3 chapitre 6

**On appelle équation différentielle <u>linéaire à coefficients constants du premier ordre</u> toute équation de la forme :**

EDLCC

$$a.y'(t) + b.y(t) = f(t) \quad (E)$$

**où $a \neq 0$, b sont des constantes réelles, y une fonction inconnue (que l'on cherche à déterminer) et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.**

**On note aussi cette équation :**

$$a.\frac{dy}{dt} + b.y = f \quad (E)$$

**La fonction $t \mapsto f(t)$ est appelée <u>second membre</u> de l'équation (E).**

**L'équation : $a.\frac{dy}{dt} + b.y = 0 \quad (E_0)$ est appelée <u>équation différentielle sans second membre</u> associée à (E).**

Page 4 chapitre 6

<u>Exples</u> d'EDLCC du 1er ordre :

① $5y'(t) + 3y(t) = 7$ second membre, c'est une constante.

② $\frac{dy}{dt} + 2y = 3t^2 + 1$

③ $4\dot{x} - x = \cos t \Leftrightarrow 4x'(t) - x(t) = \cos t$ 2nd membre

④ $\begin{cases} -y' + 3y = 5e^{-t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ← Condition initiale.

<u>Remarque</u> : ①, ② et ③ ont une $\infty$té de solutions
④ a une seule solution.

**Théorème** : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre $a.\frac{dy}{dt} + b.y = f$ (E) sont obtenues de la façon suivante :

$a \neq 0$ $y'$

$ay'+by=0$ $(E_0)$

a) On résout l'équation sans second membre associée, les solutions sont : $\boxed{y_0(t) = K.e^{-\frac{b}{a}t}}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation (E), on la note $y_P$

c) Les solutions de (E) sont alors $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$ . Ces solutions sont aussi appelées "solution générale" de l'équation (E).



Démonstration de a

$a\frac{dy}{dt} + by = 0 \quad (E_0)$

$(E_0)$ est dite "à variables séparables" (y et t)

$a\frac{dy}{dt} = -by$

$a\,dy = -by\,dt$

1er cas $y \neq 0$

$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{b}{a}\,dt$

$\ln|y| + C_1 = -\frac{b}{a}t + C_2 \quad ; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

$\ln|y| = -\frac{b}{a}t + \underbrace{C_2 - C_1}_{C \in \mathbb{R}}.$

$e^{\ln|y|} = e^{-\frac{b}{a}t + C} \Leftrightarrow |y| = \underbrace{e^C}_{= k : cte > 0} \times e^{-\frac{b}{a}t}$

2e cas $y=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow ay'+by=0$ ok

$|y| = ke^{-\frac{b}{a}t} \Leftrightarrow y = \underbrace{\pm k}_{\in \mathbb{R}^*} e^{-\frac{b}{a}t}$

## Recherche d'une solution particulière

$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k e^{\frac{2}{3}t} - \frac{5}{2}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

Page 3 ch6

| Forme du second membre $t \mapsto f(t)$ | Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$ |
|---|---|
| → $f(t)$ = constante | → $y_p(t)$ = constante |
| $f(t)$ = polynôme | $y_p(t)$ = polynôme de même degré |
| $f(t) = \alpha.\cos(mt) + \beta.\sin(mt)$ où $\alpha$, $\beta$ et m sont des réels | $y_p(t) = A.\cos(mt) + B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes. |
| $f(t) = g(t).e^{m.t}$ où m est un réel. | $y_p(t) = z(t).e^{m.t}$ |

Exples : ① Résoudre : $\overset{a}{3}y' \overset{b}{-2}y = 5$ (E) ← 2nd membre est une cte

Etape 1 ⓐ On résout $3y' - 2y = 0$

Les solutions sont : $y_0(t) = K e^{\frac{2}{3}t}$ ; $k \in \mathbb{R}$

Etape 2 ⓑ On cherche une solution particulière de $3y' - 2y = 5$ ← c'est une cte

On pose $y_p = cte$ $\Rightarrow y'_p = 0$

On remplace dans (E) : $3 \times 0 - 2 \times cte = 5 \Leftrightarrow cte = \frac{-5}{2}$

Donc $y_p = -5/2$

Page 4 chapitre 6

Etape 3 ⓒ Les solutions de (E) sont :

$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k.e^{2/3 t} - \frac{5}{2}$ ; $k \in \mathbb{R}$

**Théorème** : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre $a.\frac{dy}{dt} + b.y = f$ (E) sont obtenues de la façon suivante :

$ay' + by = 0$

a) On résout l'équation sans second membre associée, les solutions sont : $\boxed{y_0(t) = K.e^{-\frac{b}{a}t}}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation (E), on la note $y_p$

c) Les solutions de (E) sont alors $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$. Ces solutions sont aussi appelées "solution générale" de l'équation (E).

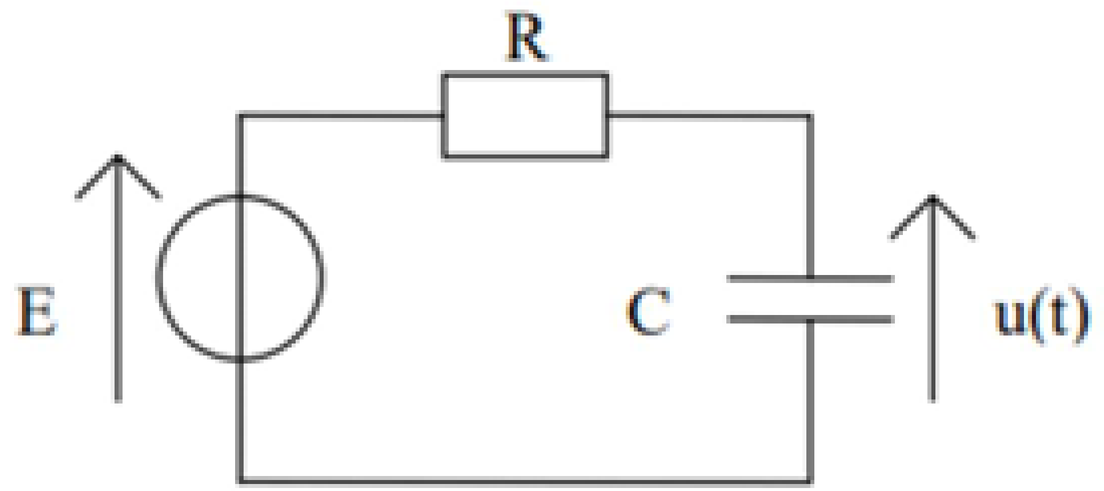
**Recherche d'une solution particulière**

$3y' + 5y = 7 \Leftrightarrow 5cte = 7 \Leftrightarrow cte = \frac{7}{5} = y_p$

| Forme du second membre $t \mapsto f(t)$ | Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$ |
|---|---|
| $f(t)$ = constante | $y_p(t)$ = constante |
| $f(t)$ = polynôme $t^2+1$ | $y_p(t)$ = polynôme de même degré |
| $f(t) = \alpha.\cos(mt) + \beta.\sin(mt)$ où $\alpha, \beta$ et m sont des réels // $3\cos(2t) + 5\sin(2t)$ | $y_p(t) = A.\cos(mt) + B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes. |
| $f(t) = g(t).e^{m.t}$ où m est un réel. | $y_p(t) = z(t).e^{m.t}$ |

# EXERCICES

1) Résoudre l'EDLCC ci-dessous, sachant que le circuit est initialement au repos.




$$RCu' + u = E.$$

2) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ : $3\frac{dy}{dt} - 2y = 2t + 1$ (on cherchera une solution particulière $y_p$ sous la forme d'un polynôme de degré 1.), avec la condition initiale : $y(0) = 1$.

3) Résoudre : $5y' - 2y = t^2$

4) Pour les poursuites d'études : Résoudre les EDLCC du premier ordre suivantes :

$2y' - y = x^3 - x + 2$ ; $2.y' - 3.y = \cos x - 2\sin x$ ; $y' - 2y = e^{2x}(x^2 - 3)$

Page 5 chapitre 6

# TP9

1) $RCu' + u = E$ (E) $a = RC$ et $b = 1$

① On résout $RCu' + u = 0$ $(E_0)$

$u_0(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}$ ; $K \in \mathbb{R}$ sont les solutions de $(E_0)$

② On cherche une solution particulière de $RCu' + u = E$

$u_p =$ constante

$u_p' = 0$

} puis on remplace dans (E)

$RC \times 0 + \text{constante} = E$

constante $= E$ donc $u_p = E$

③ Conclusion : Les solutions de l'équation sont :

$u(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + E$ ; $K \in \mathbb{R}$

* Condition Initiale : $u(0) = 0$ On cherche $K$ tel que :

$u(0) = Ke^0 + E = 0$

$\Leftrightarrow K + E = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{K = -E}$

La solution est : $u(t) = -Ee^{-\frac{1}{RC}t} + E$

$u(t) = E(-e^{-\frac{1}{RC}t} + 1)$ $\Rightarrow$ décharge d'un condensateur

$\tau = RC$

Page 5 à 7 chapitre 6

**CONCLUSION** : La solution est

$$\boxed{\text{donc } y(t) = 3e^{\frac{2}{3}t} - t - 2}$$

2) $\begin{cases} 3y' - 2y = 2t + 1 \quad (E) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ ← Condition initiale à traiter après le point ⓒ

Notes

**Etape 1** ⓐ On résout : $\overset{a}{3}y' \overset{b}{-2}y = 0$

Les solutions sont : $y_0(t) = k e^{-\frac{b}{a}t} = \boxed{k e^{\frac{2}{3}t}}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

**Etape 2** ⓑ On cherche une solution particulière de $3y' - 2y = 2t + 1$. polynôme de 1° degré

On pose $y_p = at + b$   a? b?

$y_p' = a$

$3y_p' - 2y_p = 2t + 1$.

On remplace dans (E) : $3 \times a - 2(at + b) = 2t + 1$

$\Longleftrightarrow 3a - 2at - 2b = 2t + 1$

$\Longleftrightarrow -2at + 3a - 2b = 2t + 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ \underbrace{3a}_{-3} - 2b = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -2b = 4 \Longleftrightarrow b = -2 \end{cases}$

$At + B = 5t + 3 \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \end{cases}$

Donc $\boxed{y_p(t) = -t - 2}$

**Etape 3** Les solutions de (E) sont :

$y = y_0 + y_p = \boxed{k e^{\frac{2}{3}t} - t - 2}$ ; $k \in \mathbb{R}$

**Etape 4** $y(0) = 1$

$y(0) = k - 2 = 1 \Longleftrightarrow k = 3$

Notes

(3) $\overset{a}{5}y' \overset{b}{-2}y = t^2$ (E) $\rightarrow y_0 = k\,e^{-\frac{b}{a}t}$

$ay' + by = f$ où $a = 5$ $b = -2$ et $f = t^2$

Etape 1 : On résout $5y' - 2y = 0$

Les solutions sont : $y_0(t) = k.e^{+\frac{2}{5}t}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

Etape 2 : On cherche $y_p$, une solution particulière de (E)

On pose $y_p = at^2 + bt + c$ a ? b ? c ?

$y_p' = 2at + b$

On remplace dans (E) : $5y_p' - 2y_p = t^2$

$\iff 5(2at + b) - 2(at^2 + bt + c) = t^2$

$\iff 10at + 5b - 2at^2 - 2bt - 2c = t^2$

$\iff -2at^2 + (10a - 2b).t + 5b - 2c = 1t^2 + 0t + 0 \iff \begin{cases} -2a = 1 \\ 10a - 2b = 0 \\ 5b - 2c = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 5a = -\frac{5}{2} \\ c = \frac{5b}{2} = -\frac{25}{4} \end{cases}$

$2c = 5b = -\frac{25}{2}$

$c = \frac{1}{2}\left(-\frac{25}{2}\right)$

Notes

Donc $y_p = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{25}{4}$.

Etape 3 Les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$

$y(t) = k.e^{\frac{2}{5}t} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{25}{4}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

Question Sup : $y(0) = 0$

Etape 4 : $y(0) = 0 \iff y(0) = ke^0 - 0 - 0 - \frac{25}{4} = 0$

$\iff k = \frac{25}{4}$.

La solution est donc : $y(t) = \frac{25}{4}.e^{\frac{2}{5}t} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{25}{4}$.

Page 6-7 chapitre 6

4) a) $2y' - y = x^3 - x + 2 \quad (E)$

*) on cherche l'équation homogène & ses solutions :

$2y' - y = 0$ donc les solution sont $y_0 = Ke^{\frac{1}{2}x}$, $K \in \mathbb{R}$.

*) on cherche une solution particulière.

$y_P = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y_P' = 3ax^2 + 2bx + c$.

$2(3ax^2 + 2bx + c) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3 - x + 2$

$\Leftrightarrow 6ax^2 + 4bx + 2c - ax^3 - bx^2 - cx - d = x^3 - x + 2$

$\Leftrightarrow -ax^3 + x^2(6a - b) + x(4b - c) + 2c - d = x^3 - x + 2$

identification :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 6a - b = 0 \\ 4b - c = -1 \\ 2c - d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -6 - b = 0 \\ 4b - c = -1 \\ 2c - d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \\ 4\times(-6) - c = -1 \\ 2c - d = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases}$$

Donc $y_P = -x^3 - 6x^2 - 23x - 48$.

Notes

4) a) $2y' - y = x^3 - x + 2$ (E)

*) on cherche l'équation homogène & ses solutions : $2y' - y = 0$

$2y' - y = 0$ donc les solution sont $y_0 = Ke^{\frac{1}{2}x}$, $K \in \mathbb{R}$.

*) on cherche une solution particulière de (E) :

$$y_p = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y_p' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

On remplace dans (E)

$$2(3ax^2 + 2bx + c) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3 - x + 2$$

$$\Leftrightarrow 6ax^2 + 4bx + 2c - ax^3 - bx^2 - cx - d = x^3 - x + 2$$

$$\Leftrightarrow \underline{-a}\,x^3 + x^2\underline{(6a - b)} + x\underline{(4b - c)} + \underline{2c - d} = 1x^3 \underset{+0.x^2}{-} 1x + 2$$

identification :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 6a - b = 0 \\ 4b - c = -1 \\ 2c - d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -6 - b = 0 \\ 4b - c = -1 \\ 2c - d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \\ 4\times(-6) - c = -1 \\ 2c - d = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases}$$

Donc $y_p = -x^3 - 6x^2 - 23x - 48$.

Conclusion :

...sion : les solutions de (E) sont : $y = y_0 + y_p$

$$\boxed{y = Ke^{x/2} - x^3 - 6x^2 - 23x - 48} \ ; \ K \in \mathbb{R}$$

4) b) $2y' - 3y = \cos(x) - 2\sin(x)$ (E)

$2y' - 3y = 0$

*) on cherche l'équation homogène et ses solutions :

$y_0 = 2y' - 3y = 0$ donc les solutions sont :

$y_0 = ke^{\frac{3}{2}t}$ ; $k \in \mathbb{R}$.

*) on cherche une solution particulière :

$y_p = A\cos(x) + B\sin(x)$

$y_p' = -A\sin(x) + B\cos(x)$

On remplace dans (E) :

$2(-A\sin(x) + B\cos(x)) - 3(A\cos(x) + B\sin(x)) = \cos x - 2\sin x$

$\Leftrightarrow -2A\sin(x) + 2B\cos(x) - 3A\cos(x) - 3B\sin(x) = \cos x - 2\sin x$

$\Leftrightarrow (2B - 3A)\cos(x) + (-2A - 3B)\sin(x) = 1\cos x - 2\sin x$

identification :

$\begin{cases} 2B - 3A = 1 \\ -2A - 3B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3A + 2B = 1 \\ -2A - 3B = -2 \end{cases}$

$[L_1 = 3L_1 + 2L_2]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6B - 9A - 4A - 6B = 3 - 4 \\ -2A - 3B = -2 \end{cases}$

$[L_1 = 3L_1 + 2L_2]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6B - 9A - 4A - 6B = 3 - 4 \\ -2A - 3B = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -13A = -1 \\ -2A - 3B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{13} \\ 4B - 6A + 6A + 9B = 2 + 6 = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{13} \\ B = \frac{8}{13} \end{cases}$ Donc $y_p = \frac{1}{13}\cos(x) + \frac{8}{13}\sin x$

Conclusion : les solutions de (E) sont :

$y = ke^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{13}\cos(x) + \frac{8}{13}\sin(x)$ ; $k \in \mathbb{R}$.

# Partie B : EDLCC du second ordre

Page 8 chapitre 6

Cette deuxième partie est consacrée à l'étude des Equations Différentielles Linéaires à Coefficients Constants du second ordre. Ces équations différentielles se rencontrent par exemple dans l'étude des régimes transitoires pour des dipôles R, L, C

## I. Définition / Résolution

Introduction Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $y'' + y' - 2y = 0$

Notes On cherche $y = e^{rt}$ solution de $\boxed{y'' + y' - 2y = 0 \ (E_0)}$

Dans les copies

$r$??

$y' = r.e^{rt}$

$y'' = r^2.e^{rt}$

On remplace dans $(E_0)$

$r$?? $\quad r^2 e^{rt} + r e^{rt} - 2 e^{rt} = 0$

$\underbrace{e^{rt}}_{>0} (r^2 + r - 2) = 0 \iff \boxed{r^2 + r - 2 = 0}$ ①

Equation caractéristique

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-2) = 9.$

$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$ ②

$y_1 = e^{1t}$ et $y_2 = e^{-2t}$

③ Les solutions de $(E_0)$ sont donc :

$$\boxed{y_0(t) = k_1 e^{t} + k_2 e^{-2t} \ ; \ k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

Notes

② $y'' - 6y' + 9y = 0 \quad (E_0)$

DS.

On résout : $r^2 - 6r + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 4(1)(9) = 0$

$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a} = 3$

$(u.v)' = u'v + uv'$

$(e^u)' = u'e^u$

$y_1 = e^{3t}$ On trouve $y_2 = \underset{u}{t}.\underset{v}{e^{3t}}$ est aussi solution de $(E_0)$

$y_2' = 1.e^{3t} + 3te^{3t} = (\underset{u}{1+3t})\underset{v}{e^{3t}}$

$y_2'' = 3.e^{3t} + (1+3t).3e^{3t} = (3+3+9t)e^{3t} = (6+9t)e^{3t}$.

Les solutions de $(E_0)$ sont : $y_0 = k_1 e^{3t} + k_2 t.e^{3t}$ DS

$$\boxed{y_0 = (k_1 + k_2 t)e^{3t} \; ; \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

$y_2'' - 6y_2' + 9y_2 = (\underbrace{6+9t - 6(1+3t) + 9t}_{6+9t-6-18t+9t})e^{3t}$

$6+9t-6-18t+9t = 0$ donc $te^{3t}$ est aussi solution.

Notes ③ $y'' - 4y' + 13y = 0$

On résout $r^2 - 4r + 13 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times(1)(13) = 16 - 52 = -36 < 0$$

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{4 + j\sqrt{36}}{2} = \dfrac{4+6j}{2} = \dfrac{2(2+3j)}{2} = \underset{\alpha}{2} + \underset{\beta}{3}j \\ r_2 = \overline{r_1} = r_1^* \leftarrow \text{Conjugué} \quad = 2 - 3j \end{cases}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ y(t) = k_1 \underbrace{e^{(2+3j)t}}_{e^{2t} \times e^{3jt}} + k_2 \underbrace{e^{(2-3j)t}}_{e^{2t} \times e^{-3jt}} ; \; k_1, k_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

$$y(t) = \underbrace{e^{2t}}_{\in \mathbb{R}} \left( k_1 e^{3jt} + k_2 e^{-3jt} \right)$$

$k_1 = 1/2 = k_2$ $\quad e^{2t}\left(\frac{1}{2} e^{3jt} + \frac{1}{2} e^{-3jt}\right) = e^{2t} \cos(3t) \in \mathbb{R}$

$k_1 = 1/2j$ et $k_2 = -1/2j$ $\quad e^{2t}\left(\frac{1}{2j} e^{3jt} - \frac{1}{2j} e^{-3jt}\right) = e^{2t} \sin(3t) \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{ y(t) = e^{\overset{\alpha}{2}t} \left( k_1 \cos(\overset{\beta}{3}t) + k_2 \sin(\overset{\beta}{3}t) \right) ; \; k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

<u>Théorème</u> : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre $a.\frac{dy}{dt} + b.y = f$ (E) sont obtenues de la façon suivante :

a) On résout l'équation sans second membre associée, les solutions sont : $y_0(t) = K.e^{-\frac{b}{a}t}$

b) On cherche une solution particulière de l'équation (E), on la note $y_P$

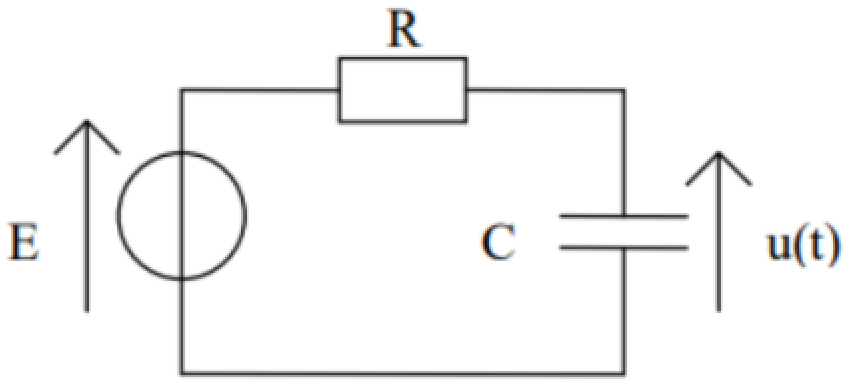
c) Les solutions de (E) sont alors $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$ . Ces solutions sont aussi appelées "solution générale" de l'équation (E).

## <u>Recherche d'une solution particulière</u>

| Forme du second membre $t \mapsto f(t)$ | Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$ |
|---|---|
| $f(t) = $ constante | $y_p(t) = $ constante |
| $f(t) = $ polynôme | $y_p(t) = $ polynôme de même degré |
| $f(t) = \alpha.\cos(mt) + \beta.\sin(mt)$<br>où $\alpha, \beta$ et m sont des réels | $y_p(t) = A.\cos(mt) + B.\sin(mt)$<br>où A et B sont des constantes. |
| $f(t) = g(t).e^{m.t}$<br>où m est un réel. | $y_p(t) = z(t).e^{m.t}$ |

# EXERCICES

1) Résoudre l'EDLCC ci-dessous, sachant que le circuit est initialement au repos.




$$RCu' + u = E.$$

2) Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ : $3\frac{dy}{dt} - 2y = 2t + 1$ (on cherchera une solution particulière $y_p$ sous la forme d'un polynôme de degré 1.), avec la condition initiale : $y(0) = 1$.
3) Résoudre : $5y' - 2y = t^2$
4) Pour les poursuites d'études : Résoudre les EDLCC du premier ordre suivantes :

$2y' - y = x^3 - x + 2$ ; $2.y' - 3.y = \cos x - 2\sin x$ ; $y' - 2y = e^{2x}(x^2 - 3)$

Notes

$$y' - 2y = e^{2x}.(x^2 - 3) \quad (E)$$

→ On résout $y' - 2y = 0$ $(E_0)$ $\qquad ay' + by = 0$

Les solutions sont : $y_0(x) = K.e^{-\frac{b}{a}x} = K.e^{2x}$ ; $k \in \mathbb{R}$

→ On cherche $y_p$, une solution particulière de $(E)$.

On pose $y_p = e^{2x}.z$ où $z$ est une fonction

$$y'_p = 2e^{2x}.z + e^{2x}.z' = e^{2x}.(2z + z')$$

On remplace dans $(E)$ :

$$e^{2x}.(2z + z') - 2e^{2x}z = e^{2x}.(x^2 - 3)$$

$$e^{2x}.(\cancel{2z} + z' - \cancel{2z}) = e^{2x}.(x^2 - 3)$$

$$\cancel{e^{2x}}.z' = \cancel{e^{2x}}.(x^2 - 3)$$

$$z' = x^2 - 3 \iff z = \frac{x^3}{3} - 3x + cte$$ on choisit $cte = 0$

Donc : $y_p(x) = e^{2x}.\left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)$

→ Conclusion :

Les solutions de $(E)$ sont : $y = y_0 + y_p$

$$y(x) = K.e^{2x} + e^{2x}\left(\frac{x^3}{3} - 3x\right)$$

$$y(x) = e^{2x}.\left(\frac{x^3}{3} - 3x + K\right)$$

**Théorème** : Les solutions de l'EDLCC du premier ordre $a.\frac{dy}{dt} + b.y = f$ (E) sont obtenues de la façon suivante :

$ay' + by = 0$

a) On résout l'équation sans second membre associée, les solutions sont : $y_0(t) = K.e^{-\frac{b}{a}t}$ ♡

b) On cherche une solution particulière de l'équation (E), on la note $y_P$

c) Les solutions de (E) sont alors $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$ . Ces solutions sont aussi appelées "solution générale" de l'équation (E).

**Recherche d'une solution particulière**

| Forme du second membre $t \mapsto f(t)$ | Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$ |
|---|---|
| $f(t) =$ constante | $y_p(t) =$ constante |
| $f(t) =$ polynôme | $y_p(t) =$ polynôme de même degré |
| $f(t) = \alpha.\cos(mt) + \beta.\sin(mt)$ où $\alpha$, $\beta$ et m sont des réels | $y_p(t) = A.\cos(mt) + B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes. |
| $f(t) = g(t).e^{m.t}$ où m est un réel. | $y_p(t) = z(t).e^{m.t}$ |

♡

Notes

Page 11 chapitre 6

**<u>Théorème/ Définition</u> : On appelle <u>équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre</u> toute équation de la forme : (E) $a.y''(t)+b.y'(t)+c.y(t)=f(t)$ (où $a \neq 0$, b et c sont des réels et f est une fonction continue sur I).**

**On note aussi : $a.\frac{d^2y}{dt^2}+b.\frac{dy}{dt}+c.y(t)=f(t)$ (E)**

**Résoudre l'équation (E), c'est rechercher toutes les fonctions y deux fois dérivables sur I et vérifiant (E). Pour cela :**

**a) On résout l'équation sans second membre associée :**

$$(E_0)\ a.y''(t)+b.y'(t)+c.y(t)=0$$

**On résout l'équation caractéristique : $a.r^2+b.r+c=0$**

$y_0$

**- si $\Delta>0$, $r_1$ et $r_2$ sont les solutions réelles de l'équation caractéristique et les solutions de ($E_0$) sont alors $\boxed{y_0(t)=K_1e^{r_1t}+K_2e^{r_2t}}$ où $K_1$ et $K_2$ sont des constantes réelles**

**- si $\Delta=0$, $r_1$ est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de ($E_0$) sont alors $\boxed{y_0(t)=e^{r_1t}(K_1+K_2t)}$ où $K_1$ et $K_2$ sont des constantes réelles .**

**- si $\Delta<0$, $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\overline{r_1}$ sont les solutions complexes de l'équation caractéristique et les solutions de ($E_0$) sont alors $\boxed{y_0(t)=e^{\alpha t}(K_1\cos(\beta t)+K_2\sin(\beta t))}$ où $K_1$ et $K_2$ sont des constantes réelles .**

$r_1=-3+4j$

$r_2=$ ~~-3-4j~~

$y_p$

**b) On recherche une solution particulière de (E), que l'on note $y_p$.**

$y=y_0+y_p$

**c) Les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme : $y_G(t)=y_0(t)+y_p(t)$, appelées solutions générales de (E).**

## II. Etude d'exemples

Exemples Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ :

Page 12 chapitre 6

- ✓ $y''+y'-2y = x^2-4$ (E)

→ On résout $y''+y'-2y=0$ $(E_0)$

On résout $r^2+r-2=0$

$\Delta = b^2-4ac = 9 > 0 \Longrightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1 \\ r_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -2 \end{cases}$

Les solutions de $(E_0)$ sont : $\boxed{y_0(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{-2x}}$ ; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

→ On cherche $y_p$, une solution particulière de (E) :

On pose $y_p = ax^2+bx+c$

$y'_p = 2ax+b$

$y''_p = 2a$

On remplace dans (E) : $y''_p+y'_p-2y_p = x^2-4$

$2a+2ax+b-2(ax^2+bx+c) = x^2-4$

$2a+2ax+b-2ax^2-2bx-2c = x^2-4$

Notes $-2ax^2+(2a-2b)x+2a+b-2c = x^2+0.x-4.$

On identifie :

$$\begin{cases} -2a=1. \\ 2a-2b=0 \\ 2a+b-2c=-4. \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1/2 \\ b=a=-1/2. \\ \underbrace{\underbrace{2\left(-\frac{1}{2}\right)}_{-1}-\frac{1}{2}}_{-\frac{3}{2}}-2c=-4 \iff -2c=-4+\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\div(-2)\left(\begin{array}{l} \iff -2c=-\frac{8}{2}+\frac{3}{2} \\ \iff c=\left(-\frac{5}{2}\right)\times\frac{-1}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff c=\frac{5}{4}$$

Donc $\boxed{y_p(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}}$

$\longrightarrow$ Les solutions de (E) sont : $y=y_0+y_p$ $\quad y(x)=K_1e^{x}+K_2e^{-2x}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

$K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$

## Equation différentielle du second ordre avec conditions initiales

**L'équation différentielle linéaire du second ordre (E) $a.\frac{d^2y}{dt^2} + b.\frac{dy}{dt} + cy(t) = f(t)$ possède une infinité de solutions sur I notées : $y_0(t)=y_0(t)+y_p(t)$. Il existe une unique solution y de (E) sur I, vérifiant les conditions initiales : $y(t_0)=y_0$ et $y'(t_0)=y_1$ où $t_0$, $y_0$ et $y_1$ sont des valeurs données dans l'énoncé du problème.**

Page 14 chapitre 6

Exemples

Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$ : $\begin{cases} y''+y'-2y = x^2 - 4 \\ \left.\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{array}\right\} \end{cases}$ conditions initials.

D'après la page 12, les solutions de (E) sont : $y(x) = K_1 e^{x} + K_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

$y'(x) = K_1 e^{x} - 2K_2 e^{-2x} - x - \frac{1}{2}$

$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 + \frac{5}{4} = 1 \\ K_1 - 2K_2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 = -\frac{1}{4} \quad \times 2 \\ K_1 - 2K_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\ominus$

$3K_2 = -\frac{3}{4}$

$K_2 = -1/4$

$\begin{cases} 2K_1 + 2K_2 = -\frac{1}{2} \\ K_1 - 2K_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\oplus$

$3K_1 = 0$

$K_1 = 0$

La solution est donc : $y(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

✓ $L\dfrac{d^2i}{dt^2}+R.\dfrac{di}{dt}+\dfrac{i}{C}=E$ (E) où R, L, C et E sont des constantes réelles non nulles telles que : $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Page 13 chapitre 6

$$Li''+Ri'+\frac{1}{C}i=E$$

→ On résout $Li''+Ri'+\frac{1}{C}i=0$ $(E_0)$

On résout $Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0$

$$\Delta=R^2-4L.\frac{1}{C}=\left(2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2-4\frac{L}{C}=4\frac{L}{C}-4\frac{L}{C}=0$$

donc $r_1=r_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{R}{2L}$

Les solutions de $(E_0)$ sont $\boxed{i_0(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}.(K_1+K_2t)}$

→ On cherche <u>une</u> solution particulière de (E) : On pose $i_p=cte$

$\Rightarrow i_p'=i_p''=0$. On remplace dans (E) : $L\times0+R\times0+\frac{1}{C}cte=E \Leftrightarrow cte=EC$

Donc $\boxed{i_p(t)=EC}$

Notes → Les solutions de (E) sont : $i = i_0 + i_p$

$$i(t) = \underbrace{e^{-\frac{R}{2L}t}}_{U} \times \underbrace{(K_1 + K_2 t)}_{V} + EC \; ; \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

$$e^{-\frac{R}{2L}t}\left(-EC - \frac{REC}{2L}t\right) + EC$$

Quest sup : le système est initialement au repos : $\begin{cases} i(0) = 0 \\ i'(0) = 0. \end{cases}$

$$i'(t) = \underbrace{-\frac{R}{2L} e^{-\frac{R}{2L}t}}_{U'} . \underbrace{(K_1 + K_2 t)}_{V} + \underbrace{e^{-\frac{R}{2L}t}}_{U} . \underbrace{K_2}_{V'} + 0$$

$$\begin{cases} i(0) = 0 \\ i'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 + EC = 0 \\ -\frac{R}{2L} . K_1 + K_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} K_1 = -EC \\ K_2 = \frac{R}{2L} . K_1 = -\frac{REC}{2L} \end{cases}$$

La solution est donc : $i(t) = EC . \left[ -e^{-\frac{R}{2L}t}\left(1 + \frac{R}{2L}t\right) + 1 \right]$

**Exercice 1** **EDLCC du 2nd ordre**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

Page 16 chapitre 6

1) $y''-y'-2.y = 6.x^2$
2) $y''+2.y'+5.y = \cos(2x)+2.\sin(2x)$
3) $\begin{cases} y''-4.y'+3.y = -\frac{4}{5}.x.e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - \omega^2 y(t) = 0 \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = A \end{cases}$ où ω et A sont des constantes réelles non nulles.
5) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y(t) = 0 \\ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0 \end{cases}$ où ω est une constante réelle non nulle.