

DS2 de R4.04 Outils Mathématiques et Logiciels du semestre 4

Le logiciel Maxima pourra être utilisé pour **vérifier** les calculs, sauf lorsque ce sera explicité dans l'énoncé.

Exercice 1 (4 points) + Bonus 0,5 pt. à tous les étudiants, suite à l'annulation de la question ② de l'ex. de réflexion.

Soit M , la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que la matrice M est inversible, puis calculer l'inverse de M . Quel est son rang ?

$$\rightarrow \det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \end{matrix} = +1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

M est donc inversible

$$\rightarrow \text{CoM} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{\text{CoM}}{\det M} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Résoudre à l'aide de l'inverse de la matrice M le système ci-dessous, où m est un réel fixé.

$$(S_m) \begin{cases} x - z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ y + z = 2m \end{cases}$$

$$(S_m) \Leftrightarrow M \cdot V = B \quad \text{où} \quad V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M^{-1} M \cdot V = M^{-1} B$$

$$I \cdot V = M^{-1} B$$

$$V = M^{-1} B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m - 1 + 6m \\ 2m + 1 - 4m \\ -2m - 1 + 6m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow V = \begin{pmatrix} 5m - 1 \\ 1 - 2m \\ 4m - 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 5m - 1 \\ 1 - 2m \\ 4m - 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3 + Bonus 0,5 pt. Ex 1

Exercice 2 (2 points) Avec MAXIMA

Soit A, la matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$, puis en déduire la matrice inverse de A. On montrera le calcul de A^2 et on pourra donner directement le résultat de A^3 à l'aide du logiciel MAXIMA.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ -2 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -6 \\ -6 & 13 & -6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -13 & 30 & -18 \\ -14 & 31 & -18 \\ -7 & 16 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +10 & -24 & 12 \\ 12 & -26 & 12 \\ 6 & -12 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 \\ 2 & -7 & 6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -13 + 10 + 1 + 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow A^3 - 2A^2 - A = -2I_3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} A(A^2 - 2A - I_3) = I_3 \quad \text{donc } A^{-1} = \frac{1}{2} (-A^2 + 2A + I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1/2 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

2 + Bonus 0,5 pt. Idem Ex 1 & 2.

Exercice 1 (5,5 points)

1) On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$ où x et y sont des réels.

a) Déterminer x et y tels que $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} x+y & 12 \\ -1 & 2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 & L_1 \\ 2x+3y=17 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ y=9 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-9=-5 \\ y=9 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Déterminer x et y tels que $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

$$2A - 4B = \begin{pmatrix} 2x & 10 \\ 0 & 4x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4y & 28 \\ -4 & -12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y & -18 \\ 4 & 4x-12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-5 & L_1 \\ 4x-12y=-16 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-5 & L_1 \\ -4y=-6 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(-5+6)}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\}$$

2) Soit la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 , puis déterminer deux réels x et y tels que :

$$A^2 + xA + yI_2 = 0$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + xA + yI_2 = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2x \\ -2x & 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3+x+y & 8+2x \\ -8-2x & 5+3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3 \Rightarrow y=7 \\ 8+2x=0 \\ -8-2x=0 \\ 3x+y=-5 \end{cases} \Rightarrow x=-4$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 4 (2 points)

Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m, le rang de la matrice A ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

A est équivalente à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & m-2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$

qui est équivalente à $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3m \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow (3L_3 + (m-2)L_2 \end{matrix}$

Comme $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = \text{rg}(A'') = \begin{cases} 3 & \text{si } m \neq 0 \\ 2 & \text{si } m = 0 \end{cases}$

Exercice 4 (2,5 points) Tous les calculs de produit matriciel seront effectués avec le logiciel MAXIM

Soit les matrices P, Q et A ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer la matrice $B = PAQ$ et PQ . Que peut-on dire des matrices P et Q ?

$$B = PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$PQ = I \Leftrightarrow Q = P^{-1}$$

P et Q sont inverses l'une de l'autre.

Conjecture:

- 2) Déterminer l'expression de B^n où n est un entier naturel.

Conjecture:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^3 \end{pmatrix} \dots; \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

3) En déduire en la justifiant l'expression de A^n en fonction de B^n , puis A^n

$$B = PAP = PAP^{-1}$$

$$P^{-1}B = P^{-1}PAP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}B = AP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}BP = AP^{-1}P \Leftrightarrow A = P^{-1}BP$$

Alors $A^n = \underbrace{P^{-1}BP}_{I} \underbrace{P^{-1}BP}_{I} \underbrace{P^{-1}BP}_{I} \dots \underbrace{P^{-1}BP}_{I} \underbrace{P^{-1}BP}_{I}$

$$A^n = P^{-1}B^nP = \begin{pmatrix} 1 & 1-3^n & 1-3^n \\ 0 & 3^n & 3^n - (-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

Exercices de réflexion : (4pts)

a) Soit X et Y deux matrices réels carrées de même dimension. Montrer que si $XY = 0$ alors X et Y ne sont pas inversibles. d'où l'annulation de cette question sur 1,5 pts → Revenez en bonus sur le 3 premiers cas

Si $XY = 0$.

→ Supposons que X est inversible alors $XY = 0 \Rightarrow X^{-1}XY = X^{-1}0$

$$\Rightarrow IY = 0$$

$$\Rightarrow Y = 0 \quad \text{impossible}$$

→ De même si Y est inversible alors $X = 0$ impossible

X et Y ne sont donc pas inversibles.

b) Donnez une matrice 2×2 dont la transposée est son opposée.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ d=0 \\ c=-b \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R} \quad \text{transposée: } {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = -A$$

c) Déterminez la matrice A , telle pour tout indice i et j , avec $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, le terme a_{ij} soit donné par la formule suivante : $a_{ij} = 2i - j$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \uparrow & \text{ligne} & \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \text{colonne} & \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$