

# Énoncé DM16

$$3) \begin{cases} y'' - 4y' + 3y = -\frac{4}{5}x.e^{-x} & (E) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \text{ Conditions initiales, à traiter à la fin}$$

Exercice 1 - Page 16 chapitre 6

a) On résout  $y'' - 4y' + 3y = 0$  ( $E_0$ )

a) On résout l'équation sans second membre associée :

$$(E_0) a.y''(t) + b.y'(t) + c.y(t) = 0$$

On résout l'équation caractéristique :  $a.r^2 + b.r + c = 0$

- si  $\Delta > 0$ ,  $r_1$  et  $r_2$  sont les solutions réelles de l'équation caractéristique et les solutions de ( $E_0$ ) sont alors  $y_0(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$  où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes réelles

- si  $\Delta = 0$ ,  $r_1$  est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de ( $E_0$ ) sont alors  $y_0(t) = e^{r_1 t} (K_1 + K_2 t)$  où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes réelles.

- si  $\Delta < 0$ ,  $r_1 = \alpha + i\beta$  et  $r_2 = \overline{r_1}$  sont les solutions complexes de l'équation caractéristique et les solutions de ( $E_0$ ) sont alors

$y_0(t) = e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t))$  où  $K_1$  et  $K_2$  sont des constantes réelles.

page 11 - chap 6.

Vous devez trouver :  $y_0(t) = k_1 e^t + k_2 e^{3t}$ ;  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .

b) On cherche  $y_p$ , une solution particulière de (E):  $y'' - 4y' + 3y = -\frac{4}{5}x e^{-x}$

| Forme du second membre $t \mapsto f(t)$                                                           | Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(t) = \text{constante}$                                                                         | $y_p(t) = \text{constante}$                                                          |
| $f(t) = \text{polynôme}$                                                                          | $y_p(t) = \text{polynôme de même degré}$                                             |
| $f(t) = \alpha \cdot \cos(mt) + \beta \cdot \sin(mt)$<br>où $\alpha, \beta$ et $m$ sont des réels | $y_p(t) = A \cdot \cos(mt) + B \cdot \sin(mt)$<br>où $A$ et $B$ sont des constantes. |
| $f(t) = g(t) \cdot e^{m \cdot t}$<br>où $m$ est un réel.                                          | $y_p(t) = z(t) \cdot e^{m \cdot t}$                                                  |

ici  $f(x) = \underbrace{-\frac{4}{5}x}_{g(x)} e^{-x}$  donc : On pose  $y_p(x) = z(x) \cdot e^{-x}$

On écrit plutôt :  $y = z \cdot e^{-x}$  pour alléger l'écriture.

la dérivée de  $z$  est  $z'$  ←  
la dérivée de  $z'$  est  $z''$

$$\begin{cases} y = z \cdot e^{-x} \\ y' = (z \cdot e^{-x})' = z' \cdot e^{-x} + z \cdot (-e^{-x}) \\ y'' = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = z \cdot e^{-x} \\ y' = z' \cdot e^{-x} - z \cdot e^{-x} \\ y'' = z'' \cdot e^{-x} - 2z' \cdot e^{-x} + z \cdot e^{-x} \end{cases}$$

$$\Delta \quad (e^u)' = u' e^u$$

← factoriser par  $e^{-x}$ , puis  $y'' = \dots$

Notes Une fois que vous avez  $y_p = z e^{-x}$

$$y'_p = ( \dots ) \cdot e^{-x}$$

$$y''_p = ( \dots ) \cdot e^{-x}$$

Vous remplacez dans (E):

$$y'' - 4y' + 3y = -\frac{4}{5} x e^{-x}$$

$$( \dots ) e^{-x} = -\frac{4}{5} x \cdot e^{-x}$$

Vous tombez alors sur:  $z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5} x$

Vous cherchez un seul  $y_p = z e^{-x}$ , donc vous cherchez un seul  $z$ . Pour cela.

Notes

Vous utilisez le tableau:

$$z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5}x$$

polynôme de degré 1

| Forme du second membre $t \mapsto f(t)$                                                           | Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(t) = \text{constante}$                                                                         | $y_p(t) = \text{constante}$                                                          |
| $f(t) = \text{polynôme}$                                                                          | $y_p(t) = \text{polynôme de même degré}$                                             |
| $f(t) = \alpha \cdot \cos(mt) + \beta \cdot \sin(mt)$<br>où $\alpha, \beta$ et $m$ sont des réels | $y_p(t) = A \cdot \cos(mt) + B \cdot \sin(mt)$<br>où $A$ et $B$ sont des constantes. |
| $f(t) = g(t) \cdot e^{m \cdot t}$<br>où $m$ est un réel.                                          | $y_p(t) = z(t) \cdot e^{m \cdot t}$                                                  |

On pose  $z = ax + b$   
 $z' =$   
 $z'' =$

On remplace dans  $z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5}x$ , on identifie et on en déduit les valeurs de  $a, b$ , puis  $z$ , puis  $y_p$ .

Notes

Vous utilisez le tableau:

$$z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5}x$$

polynôme de degré 1

| Forme du second membre $t \mapsto f(t)$                                                           | Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $f(t) = \text{constante}$                                                                         | $y_p(t) = \text{constante}$                                                          |
| $f(t) = \text{polynôme}$                                                                          | $y_p(t) = \text{polynôme de même degré}$                                             |
| $f(t) = \alpha \cdot \cos(mt) + \beta \cdot \sin(mt)$<br>où $\alpha, \beta$ et $m$ sont des réels | $y_p(t) = A \cdot \cos(mt) + B \cdot \sin(mt)$<br>où $A$ et $B$ sont des constantes. |
| $f(t) = g(t) \cdot e^{m \cdot t}$<br>où $m$ est un réel.                                          | $y_p(t) = z(t) \cdot e^{m \cdot t}$                                                  |

On pose

$$z = ax + b$$

$$z' = a$$

$$z'' = 0$$

$$0 - 6(a) + 8(ax + b) = -\frac{4}{5}x$$

$$\Leftrightarrow -6a + 8ax + 8b = -\frac{4}{5}x$$

$$8ax + 8b - 6a = -\frac{4}{5}x \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -4/5 \\ 8b - 6a = 0 \end{cases}$$

On remplace dans  $z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5}x$ , on identifie et on en déduit les valeurs de  $a, b$ , puis  $z$ , puis  $y_p$ .

Notes

③ → les solutions de (E) sont donc :  $y = y_0 + y_p$

Vous devez trouver :  $y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{3x} + \left(-\frac{1}{10}x - \frac{3}{40}\right)e^{-x}; k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

④ → Conditions initiales :  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$

Equation 1 :  $y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = \dots = 1$

↑  
remplacez  $x$  par 0.

Equation 2 :  $y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{3x} + \left(-\frac{1}{10}x - \frac{3}{40}\right)e^{-x}$

⌋  
 $\Delta$   
I  $(e^u)' = u' e^u$

$(U \times V)' = U'V + UV'$

$$y'(x) = \dots$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow y'(0) = \dots = 0$$

On résout alors :  $\begin{cases} k_1 + k_2 = \frac{43}{10} \\ k_1 + 3k_2 = \frac{1}{40} \end{cases} \dots \dots k_1 = \frac{8}{5} \text{ et } k_2 = -\frac{21}{40}$  puis  
conclure la solution est  $y = \dots$