1) Transformation du signal $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$
(4 points) 4

Sujet 1

Soit $f(t) = \sqrt{3}.\cos(3\pi t) - \sin(3\pi t)$.

Compléter ci-dessous (valeurs exactes exigées) :

$A = |a - jb| = |\sqrt{3} - (-j)| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$

$\varphi = \arg(a - jb) = \arg(\sqrt{3} + j) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

$f(t) = 2\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{08}{08}$ TBui

En utilisant une formule trigonométrique, vérifier le résultat précédent :

$f(t) = \cos a.\cos b - \sin a \times \sin b = 2\left(\cos(3\pi t) \times \cos\frac{\pi}{6} - \sin(3\pi t) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$f(t) = 2\left(\cos(3\pi t) \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\left(\sin(3\pi t) \times \frac{1}{2}\right)$

$f(t) = \cos(3\pi t) \times \sqrt{3} - \sin(3\pi t) \times 1$

Quelle est la période de f ? $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

2) Linéarisation avec la formule d'Euler : (4 points) 4

Linéariser : $g(t) = \cos(3t).\sin(2t) = \left(\frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2}\right) \times \left(\frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j}\right)$

$$\left(\frac{e^{3jt}+e^{-3jt}}{2}\right)\left(\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}\right)$$

Test2 – R2.04 - Outils Mathématiques et Logiciels - Sujet 1

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{3jt}+e^{-3jt}\right)\times\left(e^{2jt}-e^{-2jt}\right)\times\frac{1}{2j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4j}\left(e^{3jt}\times e^{2jt}+e^{3jt}\times -e^{-2jt}+e^{-3jt}\times e^{2jt}+e^{-3jt}\times -e^{-2jt}\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4j}\left(e^{5jt}-e^{jt}+e^{-jt}-e^{-5jt}\right)=\frac{1}{4j}\left(e^{5jt}-e^{-5jt}+e^{-jt}-e^{jt}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4j}\left(2j\sin(5t)-2j\sin(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4j}\left(2j\left(\sin(5t-\sin(t)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sin(5t)-\sin(t)\right)$$ TB.

En déduire les primitives de $g(t)=\cos(3t).\sin(2t)$

$$G(t)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos(5t)+\frac{1}{5}\cos(t)\right)+cte$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\left(-\cos(5t)+\cos(t)\right)\right)+cte=\frac{1}{10}\left(-\cos(5t)+\cos(t)\right)+cte$$

1) Transformation du signal $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$ (4 points) 4

sujet 2

Soit $f(t) = \cos(4t) - \sqrt{3}.\sin(4t)$. $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$

Compléter ci-dessous (valeurs exactes exigées) :

A = $|a - jb| = |1 + \sqrt{3}j| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

φ = $\arg(a - jb) = \arg(1 + \sqrt{3}j) = \arctan(\sqrt{3}) = 60°$

f(t) = $A\cos(\omega t + \varphi) = \boxed{2\cos(4t + 60°)}$

$\frac{08}{08}$ TB

En utilisant une formule trigonométrique, vérifier le résultat précédent :

avec : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

f(t) = $2\cos(4t + 60°) = 2(\cos(4t) \times \cos(60) - \sin(4t) \times \sin(60))$

$f(t) = 2\left(\cos(4t) \times \frac{1}{2} - \sin(4t) \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f(t) = \frac{\cancel{2}\cos(4t)}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2}\sin(4t) \times \sqrt{3}}{\cancel{2}} = \boxed{\cos(4t) - \sqrt{3}\sin(4t)}$

On sait que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ainsi ;

Quelle est la période de f ? T = $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}$

2) Linéarisation avec la formule d'Euler : (4 points) 4

Linéariser : $g(t) = \sin(3t).\cos(2t)$

On sait que $\sin(3t) = \frac{e^{3jt} - e^{-3jt}}{2j}$

Mais aussi que $\cos(2t) = \frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}$

Ainsi on a : $g(t) = \dfrac{e^{3jt} - e^{-3jt}}{2j} \times \dfrac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}$

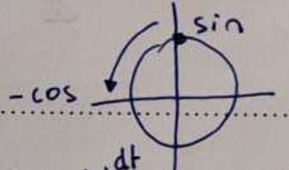
$g(t) = \dfrac{1}{4j}\left(\left(e^{3jt} - e^{-3jt}\right) \times \left(e^{2jt} + e^{-2jt}\right)\right)$ $\quad a^n \times a^{n'} = a^{n+n'}$

$g(t) = \dfrac{1}{4j}\left(e^{5jt} + e^{jt} - e^{-jt} - e^{-5jt}\right)$

$g(t) = \dfrac{1}{4j}\left(\underbrace{e^{5jt} - e^{-5jt}} + e^{jt} - e^{-jt}\right) = \dfrac{1}{4j}\left(2j\sin(5t) + 2j\sin(t)\right)$

$g(t) = \dfrac{2\cancel{j}\sin(5t)}{4\cancel{j}} + \dfrac{2\cancel{j}\sin(t)}{4\cancel{j}} = \dfrac{\sin(5t)}{2} + \dfrac{\sin(t)}{2}$

ou $\boxed{g(t) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(5t) + \sin(t)\right)}$ TB



En déduire les primitives de $g(t) = \sin(3t).\cos(2t)$

G(t) = … primitive de $\frac{1}{2}\sin(5t)$ $\quad \int u'\sin(u)\,dt = -\cos u + \text{cte}$

$\frac{1}{2\cdot 5}\int 5\sin(5t)\,dt = \frac{1}{10}\int 5\sin(5t)\,dt$ soit $\boxed{F = -\frac{1}{10}\cos(5t)}$ + cte

De la m̂ manière pour $\frac{1}{2}\sin(t)$ où sa primitive vaut $\boxed{F_1 = -\frac{1}{2}\cos(t)}$ + cte

↳ $\left(\frac{1}{2}\int \sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t) + \text{cte}\right)$

Donc ici, $G(t) = F(t) + F_1(t) = -\dfrac{1}{10}\cos(5t) - \dfrac{1}{2}\cos(t)$

$G(t) \boxed{= \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\cos(5t)}{5} - \cos(t)\right)}$ + cte

1) Transformation du signal $f(t) = a.\cos(\omega t) + b.\sin(\omega t) = A.\cos(\omega t + \varphi)$ (4 points)

Soit $f(t) = 3.\cos(5\pi t) - 3.\sin(5\pi t)$.

Sujet 3

Compléter ci-dessous (valeurs exactes exigées) :

A = $|a - jb| = |3+3j| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

φ = $\arg(a - jb) = \arg(3+3j) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

f(t) = $3\sqrt{2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

08/08 TBien

En utilisant une formule trigonométrique, vérifier le résultat précédent :

f(t) = $3\sqrt{2}\cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos 5\pi t \cos\frac{\pi}{4} - \sin 5\pi t \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 3\sqrt{2}\left(\cos(5\pi t) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(5\pi t) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= 3 \times \frac{2}{2}\cos(5\pi t) - 3 \times \frac{2}{2}\sin(5\pi t)$

$= 3\cos(5\pi t) - 3\sin(5\pi t)$

TB

Quelle est la période de f ? T = $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$

2) Linéarisation avec la formule d'Euler : (4 points) 4

Linéariser : $g(t) = \sin(2t).\sin(3t) = \left(\frac{e^{2tj} - e^{-2tj}}{2j}\right)\left(\frac{e^{3tj} - e^{-3tj}}{2j}\right)$

$= -\frac{1}{4}\left(e^{2tj} - e^{-2tj}\right)\left(e^{3tj} - e^{-3tj}\right)$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{5tj} - e^{-tj} - e^{tj} + e^{-5tj}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{5tj} + e^{-5tj} - e^{tj} - e^{-tj}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2\cos(5t) - 2\cos(t)\right)$$

Donc $g(t) = -\frac{1}{2}\left(\cos(5t) - \cos(t)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(t) - \cos(5t)\right)$$

TB

En déduire les primitives de $g(t) = \sin(2t).\sin(3t)$

$G(t) = \int g(t)\,dt = \int \sin(2t)\sin(3t)\,dt = \int\left[\frac{1}{2}\left(\cos(t) - \cos(5t)\right)\right]dt$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(t) - \frac{1}{2}\int \cos(5t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin t\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin(5t)\right] + cste$$

Donc $G(t) = \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{1}{10}\sin(5t) + cste$

TB.