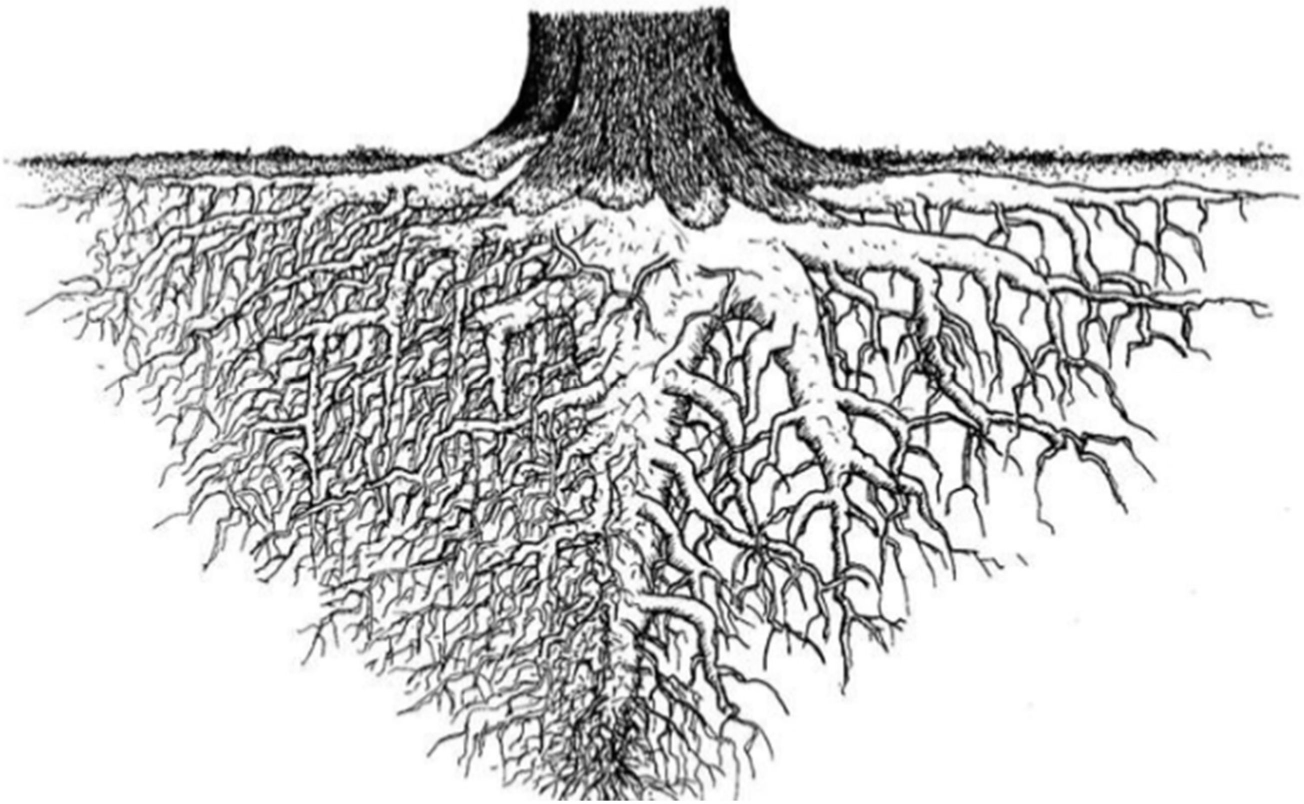
Chapitre 5 : Compléments sur les nombres complexes, Polynômes, Fractions rationnelles.



III. Factorisation d'un polynôme de degré >2

Page 23 chapitre 5

1) Division euclidienne de polynômes

Exemple Soit $A(x) = x - 2x^2 + x^3 + 1$ et $B(x) = x^2 + 2$

Effectuer la division euclidienne de A par B, c'est effectuer la division de A par B en ordonnant A et B suivant les puissances décroissantes.

* $\deg A \geq \deg B$; $3 \geq 2$

dividende $A = x^3 - 2x^2 + x + 1$ | $x^2 + 2 = B$ diviseur

$-(x^3 + 2x)$ | $x - 2 = Q$ quotient

$-2x^2 - x + 1$

$-(-2x^2 - 4)$

reste $R = -x + 5$

$? \times x^2 = x^3$

$? \times x^2 = -2x^2$

$? \times x^2 = -x$

la division euclidienne s'arrête lorsque $\deg R < \deg B$

et : $A = B \times Q + R$. Vérif : $(x^2+2)(x-2) - x + 5 = x^3 - 2x^2 + x + 1$

$\boxed{B \times Q} + R = \boxed{A}$

Page 23 chapitre 5

Définition / Théorème de la division euclidienne de polynômes

Soit A et B deux polynômes à coefficients complexes tels que : $B \neq 0$ et $\deg(A) \geq \deg(B)$.

Il existe alors un unique couple de polynômes (Q,R) vérifiant : $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$.

On dit alors que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.
La division euclidienne de A par B est aussi appelée division de A par B suivant les puissances décroissantes.

- ✓ Remarque Si R=0, alors A=BQ. On dit alors que le polynôme A est factorisable par B, ou que B divise A, ou encore que A est divisible par B.

4) Factorisation d'un polynôme de degré >2

Page 24 chapitre 5

Soit P, un polynôme de degré quelconque, à coefficients quelconques.

$P(\alpha) = 0$

a) α est une racine de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x- \alpha)$

$$P(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \;/\; P(x) = (x-\alpha).\,Q(x)$$

$P(5) = 0 \iff$ P est factorisable par $x-5$.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x-5 \\ \hline 0 & Q \end{array}$$

$P(x) = (x-5).Q(x)$

$P(-2) = 0 \iff$ // $x+2$

Page 24 chapitre 5

✓ Exemple 1 Chercher une racine évidente du polynôme P, défini par : $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$. Puis le factoriser (l'écrire comme produit de polynômes de plus bas degré possible)

$P(1) = 1^3 - 3\times 1^2 + 4\times 1 - 2 = 1 - 3 + 4 - 2 = 5 - 5 = 0.$

P est donc factorisable / divisible par $x - 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2 & x - 1 \\
\hline
-(x^3 - x^2) & \underbrace{x^2 - 2x + 2}_{= Q(x)} \\
\quad -2x^2 + 4x - 2 & \\
\quad -(-2x^2 + 2x) & \\
\qquad 2x - 2 & \\
\qquad -(2x - 2) & \\
R(x) = 0 &
\end{array}
$$

$P(x) = (x-1)\cdot(x^2 - 2x + 2)$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 2 = -4$

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{2+2j}{2} = 1 + j \\
x_2 = \overline{x_1} = x_1^* = 1 - j
\end{cases}
$$

$P(x) = (x-1)\underbrace{(x-1-j)}_{(x-x_1)}\underbrace{(x-1+j)}_{(x-x_2)}$ est la factorisation de P dans $\mathbb{C}$

$P(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$ est la factorisation de P dans $\mathbb{R}$.

Soit $P \in \boxed{\mathbb{R}[x]}$ tel que $P(-2) = P(3) = 0$

Alors P est factorisable par ?

$(x+2)\times(x-3)$

Page 24 chapitre 5

b) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ **sont des racines de P si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par** $(\mathbf{x}-\alpha_1).(\mathbf{x}-\alpha_2)\dots(\mathbf{x}-\alpha_k)$

$P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \dots = P(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \ / \ P(x) = (x-\alpha_1).(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)Q(x)$

Page 25 chapitre 5

✓ Exemple 2 Soit le polynôme : $P(x) = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10$. Chercher au moins deux racines évidentes de P, puis en déduire les autres. Quelle est alors la factorisation de P ?

$P(1) = 1 - 3 - 11 + 3 + 10 = 14 - 14 = 0$

$P(-1) = 1 + 3 - 11 - 3 + 10 = 14 - 14 = 0$

donc P est divisible par : $(x-1)\times(x+1) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{l|l} P = x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 3x + 10 & x^2 - 1 \\ \hline -(x^4 - x^2) & x^2 - 3x - 10 = Q \\ \quad -3x^3 - 10x^2 + 3x + 10 & \\ -(-3x^3 + 3x) & \\ \quad -10x^2 + 10 & \\ -(-10x^2 + 10) & \\ \quad 0 = R & \end{array}$$

$P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - 3x - 10)$

$\Delta = 9 + 40 = 49$

$x_1 = \frac{3+7}{2} = 5$

$x_2 = \frac{3-7}{2} = -2$

$P(x) = (x-1)(x+1)(x-5)(x+2)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

c) α est une racine de P et P′ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^2$
On dit alors que α est une racine double de P (ou est de multiplicité 2).

Page 24 chapitre 5

$P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \;/\; P(x) = (x-\alpha)^2 . Q(x)$

e)

d) α est une racine de P, P′ et P″ si et seulement si P est divisible (ou factorisable) par $(x-\alpha)^3$. On dit alors que α est une racine triple de P (ou est de multiplicité 3).

$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ et $P^{(3)}(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow \exists!\, Q \in \mathbb{C}[X] \;/\; P(x) = (x-\alpha)^3 . Q(x)$

Etc…

✓ <u>Exemple 3</u> Déterminer une racine évidente <u>multiple</u> du polynôme P suivant, puis le factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

Page 25 chapitre 5

$P(1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2 \Rightarrow P'(1) = 4 - 6 + 4 - 2 = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 12x + 4 \Rightarrow P''(1) \neq 0$

$P(1) = P'(1) = 0$ et $P''(1) \neq 0$ alors 1 est racine double de P qui est divisible par $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
P \quad x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 & x^2 - 2x + 1 = \\
\hline
-(x^4 - 2x^3 + x^2) & x^2 + 1 = Q \\
\quad\quad x^2 - 2x + 1 & \\
\quad -(x^2 - 2x + 1) & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$P(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 1)$

$P(x) = (x-1)^2 \cdot (x-j)(x+j)$ est factorisé dans $\mathbb{C}$.

$P(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 + 1)$ est la factorisation dans $\mathbb{R}$.

3) Méthodologie pour factoriser un polynôme de degré>2

Page 27 chapitre 5

- ✓ Définition

Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}$ (dans $\mathbb{R}$), c'est l'écrire comme produit de polynômes à coefficients complexes (réels) de plus bas degré possible.

- ✓ Théorème de D'Alembert

- Soit P, un polynôme de degré n : $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$.

P possède alors n racines dans l'ensemble $\mathbb{C}$: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ distinctes ou non. On peut alors factoriser P dans $\mathbb{C}$: $P(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n)$

P est donc factorisable dans $\mathbb{C}$ en n polynômes de degré 1.

- Soit P, un polynôme de degré n à coefficients réels :

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$.

P est factorisable dans $\mathbb{R}$ en produit de

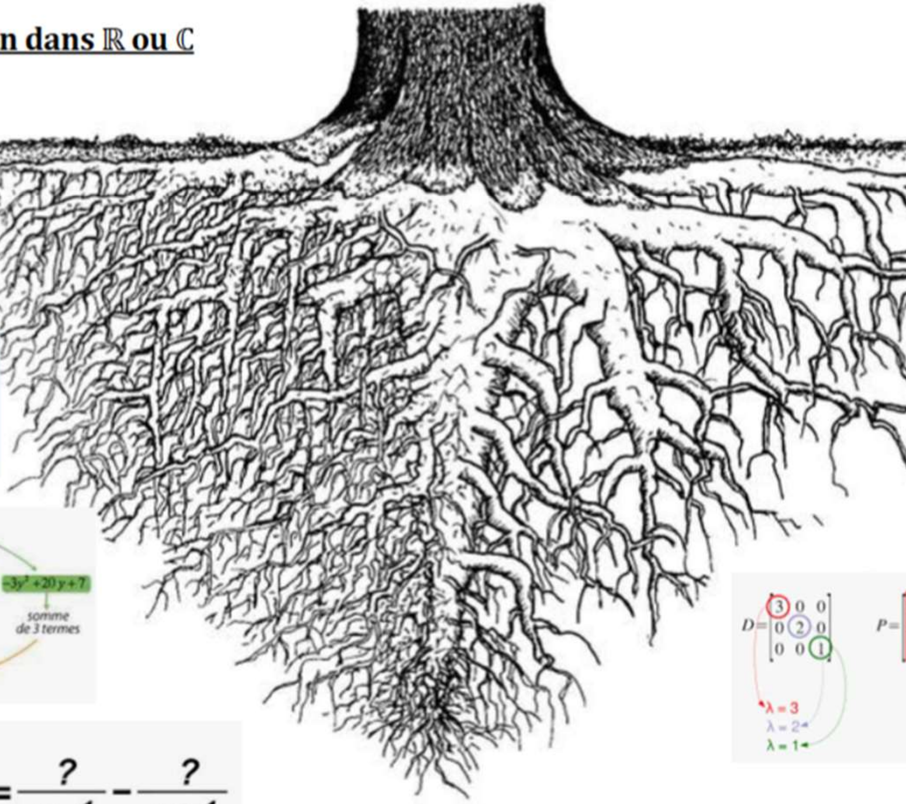
- polynômes de degré 1 à racine réelle : (x-a) avec $a \in \mathbb{R}$

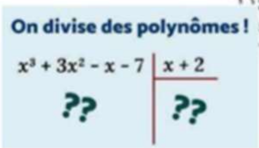
et de - en polynômes de degré 2 à racines complexes conjuguées.

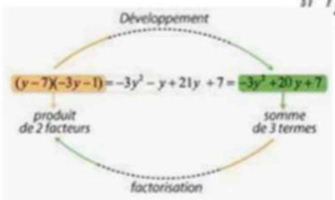
Chapitre 5 : Compléments sur les nombres complexes, Polynômes,

Factorisation dans ℝ ou ℂ
Fractions

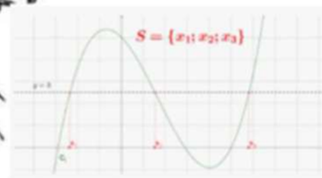
Applications

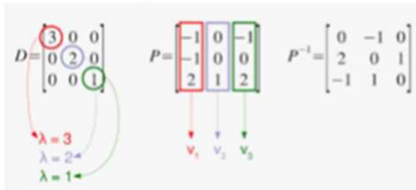


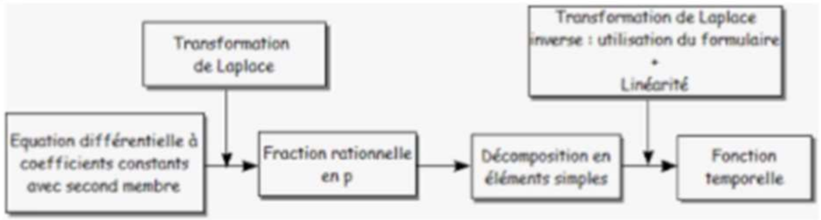




$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{?}{x-1} - \frac{?}{x+1}$$







Page 33 chapitre 5

1) Formulaire

Définition **Soit f, une fonction causale (i.e. $f(t) = 0 \ \forall t < 0$) , on appelle transformée de Laplace de la fonction f, la fonction F, définie par : $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}.dt$**

On note : $T_L[f(t)]= F(s)=\int_0^{+\infty} f(t).e^{-st}.dt$. Le tableau ci-après :

f, fonction causale	$T_L[f(t)]$ ou F(s)
$\delta(t)$	1
U(t) ou 1	$\frac{1}{s}$
$t^n.U(t)$ ou t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$Cos(\omega t).U(t)$ ou $Cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$Sin(\omega t).U(t)$ ou $Sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}.U(t)$ ou e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Si f est dérivable sur $[0, +\infty[$ $f'(t)$	$s.F(s) - f(o)$
Si f est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ $f''(t)$	$s^2.F(s) - s.f(o) - f'(0)$

2) Résolution d'une équation différentielle à l'aide de la transformation de Laplace

Résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide de la transformation de Laplace :

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2.U(t) \\ y(0) = \cancel{1}\ 0 \; et \; y'(0) = \cancel{-1}\ 0 \end{cases}$$

Indications : On pose Y(s), la transformée de Laplace de y(t) ; on applique la transformation de La place à l'équation complète, on obtient alors une équation algébrique d'inconnue Y(s), que l'on résout. Puis, on décompose Y(s) en somme d'éléments simples, et pour finir, on en déduit y(t) la transformée inverse de Y(s).

Réponse : $y(t) = \cancel{(1 - e^{-t} + e^{-2t}).U(t)}$

EDLCC d'inconnue $y(t)$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2.U(t) \\ y(0) = \cancel{1}\,0 \text{ et } y'(0) = \cancel{-1}\,0 \end{cases}$

Page 34 chapitre 5

$$T_L(y') = sY(s) - \cancel{y(0)} \to 0$$

$$T_L(y'') = s^2 Y(s) - s\,\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} \quad (y(0) \to 0,\ y'(0) \to 0)$$

T_L $\downarrow$

Equat° algébrique d'inconnue $Y(s)$

$+ \times$

$$T_L\left(y'' + 3y' + 2y\right) = T_L(2)$$

$$T_L(y'') + 3.T_L(y') + 2.T_L(y) = 2.T_L(1)$$

$$\longrightarrow s^2.Y(s) + 3.s.Y(s) + 2.Y(s) = 2.\frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow Y(s).\left(s^2 + 3s + 2\right) = \frac{2}{s}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y(s) = \frac{2}{s(s^2+3s+2)}} \xrightarrow[T_L^{-1}]{} y(t) = T_L^{-1}\left(\frac{2}{s(s^2+3s+2)}\right)$$

On décompose $Y(s)$ en somme d'éléments simples.

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2.U(t) \\ y(0) = 1 \; et \; y'(0) = -1 \end{cases}$$

Page 34 chapitre 5

$$Y(s) = \frac{2}{s(\underbrace{s^2+3s+2})} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad}$$

$$\Delta = 9-8 = 1 > 0 \quad \begin{cases} s_1 = \frac{-3+1}{2} = -1 \\ s_2 = \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

$$Y(s) = \frac{\overset{P}{2}}{\underbrace{s(s+1)(s+2)}=B} \overset{\text{théorie}}{=} \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1} + \frac{c}{s+2} \qquad a, b, c \; \underline{\underline{cte}}$$

$$\deg P = 0 < \deg B = 3$$

$$\text{donc } Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \downarrow$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 2.\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$y(t) = 1 - 2.e^{-t} + e^{-2t} \text{ est la solution}$$

$$- \; a = [s.Y(s)]_{s=0} = \left[\frac{\cancel{s}\,2}{\cancel{s}(s+1)(s+2)}\right]_{s=0} = \frac{2}{1 \times 2} = 1$$

$$- \; b = [(s+1).Y(s)]_{s=-1} = \left[\frac{2}{s(s+2)}\right]_{s=-1} = \frac{2}{(-1)(1)} = -2$$

$$c = [(s+2).Y(s)]_{s=-2} = \left[\frac{2}{s(s+1)}\right]_{s=-2} = \frac{2}{(-2)(-1)} = 1$$

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2.U(t) \\ y(0) = 1 \; et \; y'(0) = -1 \end{cases}$$

Wolframalpha

y"+3*y'+2*y=2;y(0)=0;y'(0)=0

NATURAL LANGUAGE   MATH INPUT   EXTENDED KEYBOARD   EXAMPLES   UPLOAD   RANDOM

Input:

$\{y''(x) + 3\,y'(x) + 2\,y(x) = 2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0\}$

Autonomous equation:

$y''(x) = 2 - 2\,y(x) - 3\,y'(x)$

Autonomous equation »

ODE classification:

second-order linear ordinary differential equation

Alternate form:

$\{y''(x) = -3\,y'(x) - 2\,y(x) + 2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0\}$

Differential equation solution: Approximate form   Step-by-step solution

$y(x) = e^{-2x}\,(e^x - 1)^2$

Exercice 2 Décomposer en somme d'éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions ci-dessous en suivant les étapes indiquées ci-après :

Etape 1 : Factoriser le dénominateur dans $\mathbb{C}$; Etape 2 : Déterminer si la fraction est irréductible ; Etape 3 : Calculer la partie entière de la fraction irréductible ;

Etape 4 : Décomposer en sommes d'éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction (si la fraction a des pôles multiples, voir l'encadré ci-dessous)

Page 38 chapitre 5

$$F(x) = \frac{x^5 + x^2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \qquad G(x) = \frac{2x^4 + x^2 - x^3 - x}{x^3 - x^2 + x - 1} \qquad \boxed{H(s) = \frac{1}{s.(\tau s + 1)}}$$

$$K(x) = \frac{x + 3}{(x-1)^2(x^2+1)} \qquad L(x) = \frac{10x^2}{x^4 + 3x^2 - 4} \qquad N(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x - 2)}$$

Page 39 chapitre 5

Corrige Exercices amphi

Décomposer en somme d'élts simples $H(s) = \dfrac{1}{s(\tau s+1)} = \dfrac{A}{B}$. Page 38 – Ex 2 – H(s)

τ = tau

– $\deg A = 0 < \deg B = 2$ donc

$$H(s) = \frac{1}{\underbrace{s(\tau s+1)}_{\text{factorisé}}} = \frac{a}{s} + \frac{b}{\tau s+1}$$

ses racines (solutions) sont : 0 et $-\frac{1}{\tau}$.

$$s(\tau s+1) = 0 \iff s = 0 \text{ ou } \tau s + 1 = 0 \iff s = 0 \text{ ou } s = -1/\tau.$$

Méth 1 : $a = \left[s \cdot H(s)\right]_{s=0} = \left[\dfrac{1}{\tau s+1}\right]_{s=0} = 1$

$b = \left[(\tau s+1) \cdot H(s)\right]_{s=-1/\tau} = \left[\dfrac{1}{s}\right]_{s=-1/\tau} = -\tau$

Méth 2 : $H(s) = \dfrac{1}{s(\tau s+1)} = \dfrac{a(\tau s+1) + bs}{s(\tau s+1)}$

$\iff 1 = a\tau s + a + bs \iff (a\tau + b)s + a = 1$

$\iff \begin{cases} a\tau + b = 0 \\ a = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} b = -\tau \\ a = 1 \end{cases}$

$0 \cdot s + 1$

$H(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{-\tau}{\tau s+1} \iff h(t) = T_L^{-1}(H(s)) \overset{P.33}{=} 1 - \tau \cdot ?$

FROM THE MAKERS OF **WOLFRAM LANGUAGE** AND **MATHEMATICA**

WolframAlpha

invlaplace (1/(s*(tau*s+1)),s)

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{s\,(\tau\,s+1)}\right](t)$$

$\mathcal{L}_s^{-1}[f(s)](t)$ is the inverse Laplace transform of $f(s)$ with positive real variable t

Result:

$$1-e^{-t/\tau}$$

Exercice 3 Décomposer en somme d'éléments simples la fraction suivante, puis en déduire sa transformée de Laplace inverse .

$$G(s) = \frac{1}{s^2(RCs+1)} = \frac{A}{B} \qquad \tau = RC$$

Page 38 chapitre 5

Page 39 chapitre 5

- $\deg A = 0 < \deg B = 3$

$$G(s) = \frac{1}{\underbrace{s^2(\tau s+1)}_{\text{est factorisé}}} \overset{\text{admis}}{=} \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s} + \frac{c}{\tau s+1}.$$

tau

0 est "racine double de B" ou " pôle double de G"

$-1/\tau$ " simple de B

Méth 1

$$a = \left[s^2 . G(s)\right]_{s=0} = \left[\frac{1}{\tau s+1}\right]_{s=0} = 1$$

$$\cancel{b = \left[s . G(s)\right]_{s=0}} = \cancel{\left[\frac{1}{s(\tau s+1)}\right]_{s=0}} = \cancel{\frac{1}{0}}$$

$$c = \left[(\tau s+1) . G(s)\right]_{s=-1/\tau} = \left[\frac{1}{s^2}\right]_{s=-1/\tau} = \tau^2$$

Calcul de b :

$$G(1) = \frac{1}{\tau+1} = a + b + \frac{c}{\tau+1}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{\tau+1} - 1 - \frac{\tau^2}{\tau+1} = \frac{1-\tau^2-(\tau+1)}{\tau+1}$$

$$\Leftrightarrow b = $$

$$b = \frac{-\tau^2-\tau}{\tau+1} = \frac{-\tau(\tau+1)}{\tau+1} = -\tau$$

invlaplace (1/(s^2*(tau*s+1)),s)

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{1}{s^2(\tau s+1)}\right](t)$$

$\mathcal{L}_s^{-1}[f(s)](t)$ is the inverse Laplace transform of $f(s)$ with positive real variable t

Result:

$$\tau\left(e^{-t/\tau}-1\right)+t$$

Page 40 chapitre 5

$$H(s) = \frac{2s+1}{\underbrace{s(s^2+1)}_{B}} \; P \quad \text{théorie} \quad = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{s^2+1}$$

$\Delta < 0$

$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$\deg P = 1 < \deg B = 3$

$s^2 + 1 = 0 \qquad s^2 + 1 = (s+j)(s-j)$ Identité remarquable.

$$a = [s.H(s)]_{s=0} = \left[\frac{2s+1}{s^2+1}\right]_{s=0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$bj + c = [(s^2+1)H(s)]_{s=j} = \left[\frac{2s+1}{s}\right]_{s=j} = \frac{2j+1}{j} \times \frac{(-j)}{(-j)} = \frac{2-j}{1}$$

$$bj + c = 2 - j \iff \begin{cases} b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Donc $H(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s+2}{s^2+1} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} + 2 \cdot \frac{1}{s^2+1} \iff \boxed{h(t) = 1 - \cos t + 2 \sin t}$

Page 40 chapitre 5

WolframAlpha

invlaplace((2*s+1)/(s*(s^2+1)))

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Assuming "s" is a variable | Use as a unit instead

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{2s+1}{s(s^2+1)}\right](t)$$

$\mathcal{L}_s^{-1}[f(s)](t)$ is the inverse Laplace transform of $f(s)$ with positive real variable t

Result:

$$2\sin(t) - \cos(t) + 1$$

Exercice 1

Page 29 chapitre 5

1) Ecrire les identités remarquables de la forme développée à la forme factorisée (produit de polynômes de degré 1).
2) Ecrire sous forme factorisée (factoriser) les polynômes suivants :
$P(x) = x^2 - 9$; $P(x) = x^2 + 9$; $P(x) = 4x^2 - 25$; $P(x) = 9x^2 - 6x + 1$;
$P(x) = (x+1)^2 - 16$; $P(x) = 3(x-2)^2 + 5$
$P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
3) Factoriser les polynômes suivants :

a) $x^2 + 10x + 21$ *b)* $6x^2 + x - 1$ *c)* $x^3 + x^2 - 6x$

d) $x^3 - x^2 - x + 1$ *e)* $(x^2 - 1)^2$ *f)* $x^4 + 3x^2 + 2$.

Corrige DM17

factorisation.

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+jb)(a-jb) = a^2+b^2$

2) $P(x) = x^2 - 9 \iff P(x) = (x+3)(x-3)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

les racines : -3 et 3.

$P(x) = x^2 + 9 \iff P(x) = (x+3j)(x-3j)$ " dans $\mathbb{C}$

" $3j$ et $-3j$

$P(x) = 9x^2 - 6x + 1 \iff P(x) = (3x-1)^2$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

$\frac{1}{3}$ est racine double.

$P(x) = 4x^2 - 25 \iff P(x) = (2x+5)(2x-5)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

$-5/2$ et $5/2$ racines simple

$P(x) = (x+1)^2 - 16 \iff P(x) = ((x+1)+4)((x+1)-4)$

$= (x+5)(x-3)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

-5 et 3 sont racines.

Méthode 1

$P(x) = 3(x-2)^2+5 = 3\left((x-2)^2+\frac{5}{3}\right)$

$(x-2)^2+\frac{5}{3}=0$

$(x-2)^2 = -\frac{5}{3} = \left(j\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 \Longleftrightarrow x-2 = \pm j\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\Longleftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm j\sqrt{\frac{5}{3}}$

donc $P(x) = 3\left(x-\left(2+i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\left(x-\left(2-i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$ $x = 2 \pm i\sqrt{\frac{5}{3}}$

Page 29 chapitre 5

Méthode 2

$(x-2)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2$

$3(x-2)^2+5 = 3\left[(x-2)^2+\frac{5}{3}\right]$

$= 3\left[\left(x-2-i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x-2+i\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right]$ est factorisé dans $\mathbb{C}$.

$A^2+B^2 = (A+jB)(A-jB)$

$A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$

$X^2 = 9 \Longleftrightarrow X = \pm 3.$

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

7. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ est bicarré

On pose $X = x^2$ donc $X^2 - 5X + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4$

$= 9 > 0$ donc 2 racines

$X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{9}}{2} = 1$

$X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$ donc $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$

Retour à x :

$(x^2-1)(x^2-4)$ $\quad$ $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$

$(x^2-4) = (x-2)(x+2)$

donc $P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

$1 ; -1 ; 2 ; -2$ sont des racines simples.

3) a) $P(x) = x^2 + 10x + 21$

$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times 21 = 16 > 0$ donc 2 racines

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{16}}{2} = -7$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{16}}{2} = -3$

donc $P(x) = (x+7)(x+3)$

b) $P(x) = \underline{6}x^2 + x - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 25 > 0$ donc 2 racines

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{12} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{12} = \frac{1}{3}$

donc $P(x) = \underbrace{6}_{=2\times 3}\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) \times 2\left(x + \frac{1}{2}\right) = (3x-1)(2x+1)$

c) $P(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6)$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ donc 2 racines

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2$

donc $P(x) = x(x+3)(x-2)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

racines $0 ; -3 ; 2$.

méthode 1

3) d) $x^3 - x^2 - x + 1$ On trouve pour solution évidente 1 pour $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

$3x^2 - 2x - 1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -x^2 & -x & +1 & x-1 \\
\cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2-1 \\
\cline{1-4}
 & & -x & +1 & \\
 & & +x & -1 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$a^2 - b^2$

Méth 2

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P'(1) = 0 \end{cases}$$

$$P(-1) = 0$$

$$P'(-1) \neq 0$$

Donc $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$

1 est racine double

-1 " simple

méthode 3

d) $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2) + (-x+1) = x^2(x-1) - 1(x-1)$

$P(x) = (x-1)(x^2-1)$ avec $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$

donc $P(x) = (x-1)^2(x+1)$

est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

f) $x^4 + 3x^2 + 2$, On pose $X = x^2$: $X^2 + 3X + 2$

$\Delta = 9 - 4 \times (1) \times (2) = 9 - 8 = 1$

$X_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$ donc $x_{1,2} = \pm j$

$x^2 = -1$

$X_2 = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ donc $x_{3,4} = \pm j\sqrt{2}$

$x^2 = -2$.

donc on a dans $\mathbb{C}$, $P(x) = \overbrace{\underbrace{(x-j)(x+j)}_{(x^2+1)}\underbrace{(x-j\sqrt{2})(x+j\sqrt{2})}_{\times (x^2+2)}}^{\text{est factorisé dans } \mathbb{C}.}$

$(x^2+1) \times (x^2+2)$ est la factorisation dans $\mathbb{R}$.

e) $P(x) = (x^2-1)^2$ $\qquad x^2-1 = (x-1)(x+1)$

donc $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2$

f) $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

On pose $X = x^2$ $\qquad X^2 - 3X + 2 = (X+1)(X+2)$

retour à x :

$$P(x) = (x^2+1)(x^2+2) \qquad (x^2+1) = (x-i)(x+i)$$

$$(x^2+2) = (x-\sqrt{2}\,i)(x+\sqrt{2}\,i)$$

donc $P(x) = (x-i)(x+i)(x-\sqrt{2}\,i)(x+\sqrt{2}\,i)$

exercice 2 p-29 :

① $A(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 1$ et $B(x) = x - 2$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2x^3 - 2x^2 + x + 1 & x - 2 \quad = B \\
\cline{3-3}
A = & -2x^3 + 4x^2 & 2x^2 + 2x + 5 \quad = Q \\
\cline{2-2}
 & 2x^2 + x + 1 & \\
 & -2x^2 + 4x & \\
\cline{2-2}
 & 5x + 1 & \\
 & -5x + 10 & \\
\cline{2-2}
R = & 11 &
\end{array}
$$

Donc $A(x) = \underbrace{(x-2)}_{B} \times \underbrace{(2x^2 + 2x + 5)}_{Q} \underbrace{+ 11}_{+R}$

② $A(x) = x^3 + x + 1$ et $B(x) = x^2 + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + x + 1 & x^2 + 1 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^3 - x} & x \\
1 &
\end{array}
$$

Donc $A(x) = (x^2+1)(x) + 1$

③ ► $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ et $Q(x) = x + 5$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & -3x & +5 & x+5 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -5x^2 & & & x^2 - 3x + 12 \\
\cline{1-4}
 & -3x^2 & -3x & +5 & \\
 & +3x^2 & +15x & & \\
\cline{2-4}
 & & 12x & +5 & \\
 & & -12x & -60 & \\
\cline{3-4}
 & & & -55 & \\
\end{array}
$$

$$P(x) = (x+5)(x^2 - 3x + 12) - 55$$

▶ $P(x) = 3x^5 + 9x^4 - 20x^3 - 13x^2 + 31x + 10$ et $Q(x) = x^2 + 3x - 5$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5 + 9x^4 - 20x^3 - 13x^2 + 31x + 10 & x^2 + 3x - 5 \\
\cline{2-2}
\underline{-3x^5 - 9x^4 + 15x^3 } & 3x^3 - 5x + 2 \\
-5x^3 - 13x^2 + 31x + 10 & \\
\underline{+5x^3 + 15x^2 - 25x } & \\
2x^2 + 6x + 10 & \\
\underline{-2x^2 - 6x + 10} & \\
20 &
\end{array}
$$

donc $P(x) = (x^2 + 3x - 5)(3x^3 - 5x + 2) + 20$

Exercice 3 Chercher une racine évidente, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$ $=$

Page 29 chapitre 5

Méth 1 $P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6 = x^2(x-6) + 1.(x-6)$

$P(x) = (x^2+1)(x-6)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$.

$P(x) = (x+j)(x-j)(x-6)$ est factorisé dans $\mathbb{C}$

Méth 2 $P(6) = 6^3 - \underbrace{6.6^2}_{6^3} + 6 - 6 = 0$

P est divisible par : $x-6$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + x - 6 & x-6 \\ \cline{2-2} -(x^3 - 6x^2) & x^2+1 \\ \hline 0 \quad + x - 6 & \\ -(x-6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc $P(x) = (x^2+1)(x-6)$ dans $\mathbb{R}$.

$P(x) = (x+j)(x-j)(x-6)$ dans $\mathbb{C}$

Méth 3 $P(j) = j^3 - 6j^2 + j - 6$

$P(j) = -j + 6 + j - 6 = 0$

donc $P(-j) = 0$ car $\underbrace{P \in \mathbb{R}[x]}_{\text{P est à coefficients réels}}$

P est donc divisible par $(x-j)(x+j) = x^2+1$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + x - 6 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -(x^3 + x) & x-6 \\ \hline -6x^2 - 6 & \\ -(-6x^2-6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Exercice 3 Chercher une racine évidente, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = x^3 - 6x^2 + x - 6$

Page 29 chapitre 5

$P(6) = 6^3 - 6\times6^2 + 6 - 6 = 6^3 - 6^3 + 6 - 6 = 0$. donc P

Méth 1

est divisible par $x-6$.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + x - 6 & x - 6 \\ \hline -(x^3 - 6x^2) & x^2 + 1 \\ \quad x - 6 & \\ \quad -(x-6) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Donc :

$$P(x) = \underbrace{(x-6)(x^2+1)}_{\text{est la factorisation dans } \mathbb{R}} = \underbrace{(x-6)(x+j)(x-j)}_{\text{dans } \mathbb{C}}$$

$A^2 + B^2 = (A + jB)(A - jB)$

$x^2 + 1^2 = (x+j)(x-j)$

Méth 2

$P(j) = j^3 - 6j^2 + j - 6$

$P(j) = -j + 6 + j - 6 = 0$

Comme $\underbrace{P \in \mathbb{R}[x]}_{\text{"P est à coefficients réels}}$ Alors $P(-j) = 0$

P est donc divisible par :

$(x-j)(x+j) = x^2 + 1$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 6x^2 + x - 6 & x^2 + 1 \\ \hline -(x^3 + x) & x - 6 \\ \quad -6x^2 - 6 & \\ \quad -(-6x^2 - 6) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Exercice 4 Chercher une racine évidente multiple, puis factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 39x - 20$

$P(1) = 1 - 3 - 17 + 39 - 20 = 40 - 40 = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 34x + 39$

$P'(1) = 4 - 9 - 34 + 39 = 43 - 43 = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 18x - 34$

$P''(1) = 12 - 18 - 34 \neq 0$

1 est donc racine double de P, et est divisible par :

$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 3x^3 - 17x^2 + 39x - 20 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline -(x^4 - 2x^3 + x^2) & x^2 - x - 20 \\ \quad -x^3 - 18x^2 + 39x - 20 & \\ \quad -(-x^3 + 2x^2 - x) & \\ \quad\quad -20x^2 + 40x - 20 & \\ \quad\quad -(-20x^2 + 40x - 20) & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Alors $P(x) = (x-1)^2(x^2 - x - 20)$

$\Delta = 1 - 4(-20) = 81$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1+9}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{1-9}{2} = -4 \end{cases}$$

Conclusion $P(x) = (x-1)^2(x-5)(x+4)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 5 Factoriser le polynôme : $P(x) = x^3 + 3x - 2j$ (on cherchera d'abord une racine évidente, puis on effectuera une division euclidienne)

$P(j) = j^3 + 3j - 2j = -j + 3j - 2j = 0$ donc $P(-j) \neq 0$ car $\underbrace{P \notin \mathbb{R}[x]}$

les coeff de P ne sont pas réels

$P'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow P'(j) = -3 + 3 = 0$

$P''(x) = 6x \Rightarrow P''(j) \neq 0$

j est racine double et P est divisible par $(x-j)^2 = x^2 - 2jx + j^2$

$= x^2 - 2jx - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 3x - 2j & x^2 - 2jx - 1 \\
\cline{2-2}
-(x^3 - 2jx^2 - x) & x + 2j \\
\cline{1-1}
2jx^2 + 4x - 2j & \\
-(2jx^2 + 4x - 2j) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc $P(x) = (x+2j)(x-j)^2$

Ex1 (1) Factoriser $P(x) = x^5 - 4x^4 - 38x^3 + 44x^2 + 37x - 40$

Page 29 chapitre 5

$P(1) = \underbrace{1 - 4 - 38}_{} + 44 + 37 \underbrace{- 40}_{} = -82 + 82 = 0$

$P(-1) = \underbrace{-1 - 4}_{} + 38 + 44 \underbrace{- 37 - 40}_{} = 82 - 82 = 0.$

$P'(x) = 5x^4 - 16x^3 - 114x^2 + 88x + 37$

$P'(1) = \underbrace{5}_{} - 16 - 114 + \underbrace{88 + 37}_{} = 130 - 130 = 0$

$P'(-1) = 5 + 16 \underbrace{- 114 - 88}_{} + 37 \neq 0$

$P''(x) = 20x^3 - 48x^2 - 228x + 88$

$P''(1) = 20 \underbrace{- 48 - 228}_{} + 88 \neq 0$

1 est racine double

-1 est racine simple

P est alors divisible

par : $(x-1)^2 \times (x+1)$

$= (x^2 - 2x + 1) . (x+1)$

$= \underbrace{x^3 + x^2}_{} \underbrace{- 2x^2 - 2x}_{} + x + 1$

$= x^3 - x^2 - x + 1$

Page 29 chapitre 5

Corrige Exercices amphi

Ex1 ① Factoriser $P(x) = x^5 - 4x^4 - 38x^3 + 44x^2 + 37x - 40$

Page 29 chapitre 5

$$
\begin{array}{l|l}
P = x^5 - 4x^4 - 38x^3 + 44x^2 + 37x - 40 & x^3 - x^2 - x + 1 = B \\
\quad -(x^5 - x^4 - x^3 + x^2) & \overline{x^2 - 3x - 40 = Q} \\
\hline
\qquad -3x^4 - 37x^3 + 43x^2 + 37x - 40. & \\
\quad -(-3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 3x) & \\
\hline
\qquad\quad -40x^3 + 40x^2 + 40x - 40 & \\
\quad -(-40x^3 + 40x^2 + 40x - 40) & \\
\hline
\qquad\qquad R = 0 &
\end{array}
$$

$$P = BQ + R$$

$$P(x) = (x^3 - x^2 - x + 1)(x^2 - 3x - 40)$$

$$P(x) = (x-1)^2(x+1)(x^2 - 3x - 40)$$

$$\Delta = 9 - 4\times(-40) = 169$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3+\sqrt{169}}{2} = \dfrac{16}{2} = 8 \\ x_2 = \dfrac{3-13}{2} = -5. \end{cases}$$

$P(x) = (x-1)^2(x+1)(x-8)(x+5)$ est factorisé dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Ex2

2) Soit f, la fraction définie par : $f(x) = \frac{5.x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{A(x)}{B(x)}$

Page 29 chapitre 5

a) Factoriser le dénominateur de f : B

b) Expliquer pourquoi f est irréductible

c) Ecrire la forme de la décomposition en sommes de trois éléments simples de f

d) Calculer les coefficients de la décomposition : a, b, c.

e) En déduire la décomposition en somme d'éléments simples de f, puis ses primitives

a) $B(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$B(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 7 - 7 = 0$ $\quad B'(x) = 3x^2 - 4x - 5 \Rightarrow B'(1) \neq 0$

B est divisible par $x - 1$

$$\begin{array}{l|l} B(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 1 \\ \hline -(x^3 - x^2) & x^2 - x - 6 \\ \quad -x^2 - 5x + 6 & \\ \quad -(-x^2 + x) & \\ \quad\quad -6x + 6 & \\ \quad\quad -(-6x + 6) \;/\; 0 & \end{array}$$

$B(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$

$\Delta = 1 - 4(-6) = 25.$

$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3$

$x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$

$B(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$

Page 29 chapitre 5

(b) $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{(x-1)(x-3)(x+2)} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ est irréductible

car A et B n'ont pas de facteur commun.

(Rmque : $\deg A = 2 < \deg B = 3$.)

(c) $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{(x-1)(x-3)(x+2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-3} + \dfrac{c}{x+2}$

$$a = \left[(x-1)f(x)\right]_{x=1} = \left[\frac{5x^2+1}{(x-3)(x+2)}\right]_{x=1} = \frac{6}{(-2)(3)} = -1.$$

$$b = \left[(x-3)f(x)\right]_{x=3} = \left[\frac{5x^2+1}{(x-1)(x+2)}\right]_{x=3} = \frac{5\times 9+1}{(3-1)(3+2)} = \frac{46}{2\times 5} = \frac{23}{5}$$

$$c = \left[(x+2)f(x)\right]_{x=-2} = \left[\frac{5x^2+1}{(x-1)(x-3)}\right]_{x=-2} = \frac{5\times(-2)^2+1}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{21}{(-3)(-5)} = \frac{7}{5}$$

$$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + cte$$

$$f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{\frac{23}{5}}{x-3} + \frac{\frac{7}{5}}{x+2} \iff \int f(x)\,dx = -\ln|x-1| + \frac{23}{5}\ln|x-3| + \frac{7}{3}\ln|x+2| + cte$$