Enoncé DM16

3) $\begin{cases} y'' - 4.y' + 3.y = -\frac{4}{5}.x.e^{-x} \quad (E) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ } Conditions initiales, à traiter à la fin

Exercice 1 - Page 16 chapitre 6

a) → On résout $y'' - 4y' + 3y = 0 \quad (E_0)$

a) On résout l'équation sans second membre associée :

$$(E_0) \quad a.y''(t) + b.y'(t) + c.y(t) = 0$$

On résout l'équation caractéristique : $a.r^2 + b.r + c = 0$

- si $\Delta > 0$, r_1 et r_2 sont les solutions réelles de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors $y_0(t) = K_1e^{r_1t} + K_2e^{r_2t}$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles

- si $\Delta = 0$, r_1 est solution double de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors $y_0(t) = e^{r_1t}(K_1 + K_2t)$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles .

- si $\Delta < 0$, $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \overline{r_1}$ sont les solutions complexes de l'équation caractéristique et les solutions de (E_0) sont alors

$y_0(t) = e^{\alpha t}(K_1\cos(\beta t) + K_2\sin(\beta t))$ où K_1 et K_2 sont des constantes réelles .

page 11_chap6.

Vous devez trouver : $y_0(t) = K_1e^{t} + K_2e^{3t}$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

3) $\begin{cases} y'' - 4.y' + 3.y = -\frac{4}{5}.x.e^{-x} \quad (E) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 1 - Page 16 chapitre 6

a) → On résout $y'' - 4y' + 3y = 0$ (E_0)

On résout $r^2 - 4r + 3 = 0$ Voir page 11 du chapitre 6.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

$$\begin{cases} r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3 \\ r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Les solutions de (E_0) sont donc :

$$y_0(t) = k_1 e^{t} + k_2 e^{3t} \; ; \; k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

b) → On cherche y_p, une solution particulière de (E) : $y'' - 4y' + 3y = -\frac{4}{5}x e^{-x}$

Forme du second membre $t \mapsto f(t)$	Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$
$f(t) =$ constante	$y_p(t) =$ constante
$f(t) =$ polynôme	$y_p(t) =$ polynôme de même degré
$f(t) = \alpha.\cos(mt) + \beta.\sin(mt)$ où α, β et m sont des réels	$y_p(t) = A.\cos(mt) + B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes.
$f(t) = g(t).e^{m.t}$ où m est un réel.	$y_p(t) = z(t).e^{m.t}$

ici $f(x) = \underbrace{-\frac{4}{5}x}_{g(x)} \cdot e^{-x}$ donc : On pose $y_p(x) = z(x).e^{-x}$

On écrit plutôt : $y_p = z \cdot e^{-x}$ pour alléger l'écriture.

la dérivée de z est z' ←

la dérivée de z' est z''

$y_p' = (U.V)' = U'.V + UV'$ ⚠ $(e^U)' = U'e^U$

$y_p'' = \ldots$ ← factoriser par e^{-x}, puis $y_p'' = \ldots$

Notes Une fois que vous avez $y_p = z\,e^{-x}$

$$y_p' = (z' - z).e^{-x}$$

$$y_p'' = (\underbrace{z'' - z' - z' + z}_{z'' - 2z' + z}).e^{-x}$$

Vous remplacez dans (E) :

$$y'' - 4y' + 3y = -\frac{4}{5}x\,e^{-x}$$

$$e^{-x}\left(z'' - 2z' + z - 4(z' - z) + 3z\right) = -\frac{4}{5}x\,e^{-x}$$

$$\left(z'' - 6z' + 8z\right)e^{-x} = -\frac{4}{5}x.e^{-x}$$

Vous tombez alors sur : $z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5}x$

Vous cherchez un seul $y_p = z\,e^{-x}$, donc vous cherchez un seul z. Pour cela.

Notes Vous utilisez le tableau : $z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5}x$

polynôme de degré 1

Forme du second membre $t \mapsto f(t)$	Forme de la solution particulière cherchée $t \mapsto y_p(t)$
$f(t) = \text{constante}$	$y_p(t) = \text{constante}$
$f(t) = \text{polynôme}$	$y_p(t) = \text{polynôme de même degré}$
$f(t) = \alpha.\cos(mt) + \beta.\sin(mt)$ où α, β et m sont des réels	$y_p(t) = A.\cos(mt) + B.\sin(mt)$ où A et B sont des constantes.
$f(t) = g(t).e^{m.t}$ où m est un réel.	$y_p(t) = z(t).e^{m.t}$

On pose $z = ax + b$, $z' = a$, $z'' = 0$

$0 - 6(a) + 8(ax+b) = -\frac{4}{5}x$

$\Leftrightarrow -6a + 8ax + 8b = -\frac{4}{5}x$

$8ax + 8b - 6a = -\frac{4}{5}x \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -4/5 \\ 8b - 6a = 0 \end{cases}$

On remplace dans $z'' - 6z' + 8z = -\frac{4}{5}x$, on identifie et on en déduit les valeurs de a, b, puis z, puis y_p.

Notes

$$0 - 6(a) + 8(ax+b) = -\frac{4}{5}x$$

$$\Longleftrightarrow -6a + 8ax + 8b = -\frac{4}{5}x$$

$$8ax + 8b - 6a = -\frac{4}{5}x \Longleftrightarrow \begin{cases} 8a = -4/5 \\ 8b - 6a = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = \frac{6a}{8} = \frac{3a}{4} = \frac{-3}{40} \end{cases}$$

donc $z = -\frac{1}{10}x - \frac{3}{40}$ et $y_p = z\,e^{-x} = \left(-\frac{1}{10}x - \frac{3}{40}\right)e^{-x}$

Notes

ⓒ → Les solutions de (E) sont donc : $y = y_0 + y_p$

Vous devez trouver : $y(x) = K_1 e^{x} + K_2 e^{3x} + \left(-\frac{1}{10}x - \frac{3}{40}\right)e^{-x}$; $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

ⓓ → Conditions initials : $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

Equation 1 : $y(0) = 1 \iff y(0) = K_1 + K_2 - \frac{3}{40} = 1 \iff K_1 + K_2 = \frac{43}{40}$ ①

Equation 2 : $y(x) = K_1 e^{x} + K_2 e^{3x} + \left(-\frac{1}{10}x - \frac{3}{40}\right) \times e^{-x}$

⚠ $(e^{u})' = u'e^{u}$

$(U \times V)' = U'V + UV'$

$y'(x) = K_1 e^{x} + 3K_2 e^{3x} + \left(-\frac{1}{10}\right)e^{-x} - \left(-\frac{1}{10}x - \frac{3}{40}\right)e^{-x}$

$y'(0) = 0 \iff y'(0) = K_1 + 3K_2 - \frac{1}{10} + \frac{3}{40} = 0 \iff K_1 + 3K_2 = \frac{1}{40}$ ②

On résout alors : $\begin{cases} K_1 + K_2 = \frac{43}{40} & ① \\ K_1 + 3K_2 = \frac{1}{40} & ② \end{cases}$ ... $K_1 = \frac{8}{5}$ et $K_2 = \frac{-21}{40}$ puis

Conclure la solution etc...

Notes

On résout $\begin{cases} K_1 + K_2 = \dfrac{43}{40} \\ K_1 + 3K_2 = \dfrac{1}{40} \end{cases}$ $\ominus$

$$-2K_2 = \frac{42}{40}$$

$$K_2 = \frac{21}{20} \times \frac{-1}{2} = -\frac{21}{40}$$

$\times 3$

$\begin{cases} 3K_1 + 3K_2 = \dfrac{129}{40} \\ K_1 + 3K_2 = \dfrac{1}{40} \end{cases}$ $\ominus$

$$2K_1 = \frac{128}{40}$$

$$K_1 = \frac{16}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{8}{5}$$

Ainsi la solution est donc :

$$y(t) = \frac{8}{5} e^{x} - \frac{21}{40} e^{3x} - \left(\frac{1}{10} x + \frac{3}{40} \right) e^{-x}.$$